Übungen zur Vorlesung

# Stochastik

## Aufgaben

33. Beweisen Sie die Aussagen der Teile b) bis d) von Satz 7.7 im Skript.

34. In Übungsaufgabe 26.a) wurde die Verteilung der (zufälligen) Anzahl an „Nicht-Treffern" vor dem ersten „Treffer" in einer Abfolge von unabhängigen, binären Zufallsexperimenten (d. h.: nur zwei mögliche Ausgänge, nämlich „Treffer" bzw. „Nicht-Treffer") berechnet, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit beim Einzelexperiment gleich 1/2 ist. Für allgemeine Trefferwahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ heißt die entsprechende Verteilung der (zufälligen) Anzahl an „Nicht-Treffern" vor dem ersten „Treffer" die geometrische Verteilung mit Parameter $p$, in Zeichen Geo($p$), deren Zähldichte $f_{\mathrm{Geo}(p)}$ auf $\mathbb{N}_0$ gegeben ist durch

$$f_{\mathrm{Geo}(p)}(k) = p(1-p)^k,\ k \in \mathbb{N}_0.$$

    Berechnen Sie die $n$-fache Faltung von Geo($p$) und zeigen Sie, dass sie (unter den genannten Voraussetzungen) die Verteilung der (zufälligen) Anzahl der „Nicht-Treffer" vor dem $n$-ten „Treffer" ist, $n \in \mathbb{N}$.

35. Die Anzahl der Manuskripte, die ein bestimmter Wissenschaftler zur Veröffentlichung einreicht, sei Poisson-verteilt mit Intensitätsparameter $\lambda > 0$. Unabhängig voneinander wird jedes dieser Manuskripte mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ zur Veröffentlichung angenommen.

    Zeigen Sie, dass die Anzahl der zur Veröffentlichung angenommenen Manuskripte des zur Rede stehenden Wissenschaftlers Poisson-verteilt ist mit Intensitätsparameter $p\lambda$.

36. **Multiple Select-Aufgabe.**
    Betrachten Sie die folgenden Aussagen über Faltungen von Verteilungen.

    a) Die Faltung von zwei Binomialverteilungen mit gleichem Stichprobenumfang $n$, aber unterschiedlichen Trefferwahrscheinlichkeiten $p_1$ bzw. $p_2$ ist wieder eine Binomialverteilung.

    b) Es seien $X$ und $Y$ zwei Zufallsvariablen, die auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind und die beide (jeweils) die Dirac-Verteilung $\delta_a$ für $a \in \mathbb{R}$ besitzen, vgl. Beispiel 5.4 im Skript. Dann sind $X$ und $Y$ notwendigerweise stochastisch unabhängig und ihre Summe besitzt die Dirac-Verteilung $\delta_{2a}$.

c) Die Erlang-Verteilung mit Parametern $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Beispiel 7.5.(b) im Skript) besitzt die Lebesguedichte $f(\cdot|\lambda, n)$, gegeben durch

$$f(x|\lambda, n) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda x)\, \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \; x \in \mathbb{R}.$$

d) Es seien $X$ und $Y$ zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind und jeweils die stetige Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ besitzen. Dann besitzt ihre Summe $S = X + Y$ die stetige Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 2]$.

Ermitteln Sie die richtige Kombination korrekter Aussagen.

Hinweise:

Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.