Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie, Teil I

Das Unzulängliche,
Hier wirds Ereignis.
Goethe, Faust II

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Literatur

Einführende Literatur

📖 Bortz, J. & Schuster, Ch. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7. Auflage). Berlin: Springer. [Kap. 4]

📖 Eid, M., Gollwitzer, M. & Schmitt, M. (2010). *Statistik und Forschungsmethoden*. Weinheim: Beltz. [Kap. 7]

📖 Holling, H. & Gediga, G. (2013). *Statistik – Wahrscheinlichkeitstheorie und Schätzverfahren*. Göttingen: Hogrefe. [Kap. 2]

Weiterführende Literatur

📖 Kreyszig, E. (1982). *Statistische Methoden und ihre Anwendung* (7. Auflage). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Grundlagen Mengenalgebra und Wahrscheinlichkeitstheorie

- Im Folgenden werden zunächst grundlegende Begrifflichkeiten und Zusammenhänge der Mengenalgebra und dann der Wahrscheinlichkeitstheorie (-rechnung) behandelt.

- Grundkenntnisse der Mengenalgebra sind u. a. zum Verständnis der Wahrscheinlichkeits-rechnung erforderlich (und z.B. auch zu einem vertieften Verständnis der Messtheorie).

- Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie ermöglichen die Lösung bestimmter Probleme und sind eine Voraussetzung der Inferenzstatistik.

- Wir werden sehen, dass man in der Inferenzstatistik nur bestimmte Wahrscheinlichkeits-aussagen über Eigenschaften der Population treffen kann.

- Eine Menge A ist eine Zusammenfassung von bestimmten unterscheidbaren Objekten, die als Elemente bezeichnet werden. Mengen können durch ihre Eigenschaften beschrieben werden oder durch die Auflistung ihrer Elemente (in geschweiften Klammern, wobei die Reihenfolge der Objekte ohne Bedeutung ist).

- Wenn ein Objekt x Element einer Menge A ist, schreiben wir $x \in A$, andernfalls $x \notin A$.

- Beispiele für Mengen:

  - A = {Kopf, Zahl}, B = {John Lurie, Tom Waits, Roberto Benigni}
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (natürliche Zahlen). Analog: $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen)
  - $C = \left\{ x \in \mathbb{N} \middle| 1 \leq x \leq 50 \right\}$ (Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 50)

    Lies: „für die gilt“,
    alternativ auch ; oder :

- Mengen unterscheiden sich in ihrer Mächtigkeit (Kardinalzahl). Diese entspricht bei endlichen Mengen der Zahl der Elemente: $|A| = 2, |B| = 3, |C| = 50, |\mathbb{N}| = \infty$

- Mengen können abzählbar endlich (z.B. A, B, C), abzählbar unendlich (z.B. $\mathbb{N}$) oder überabzählbar (z.B. $\mathbb{R}$) sein.

Mengenalgebra

- Die Menge A ist dann eine Teilmenge der Menge B, wenn gilt: Wenn $a \in A$, dann immer auch $a \in B$. Man schreibt allgemein $A \subseteq B$ bzw. $A \subset B$ (echte Teilmenge, d.h. mindestens ein Element aus B ist nicht in A).

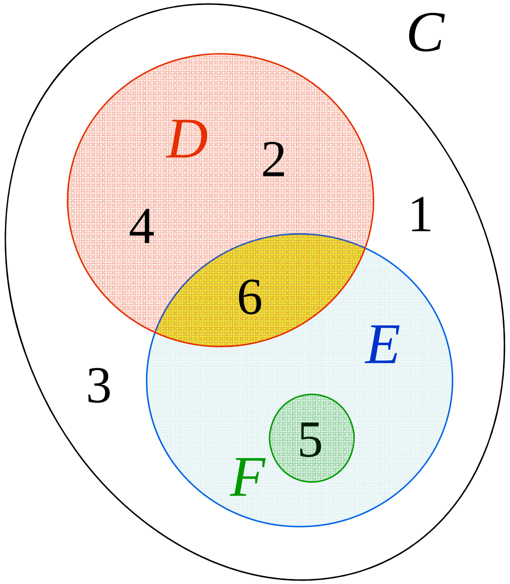
  Beispiel: $D \subset C, F \subset E, C \subseteq C.$

Beispiel Würfeln: Es seien $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die Menge aller Augenzahlen, $D = \{2, 4, 6\}$ die Menge aller geraden Augenzahlen, $E = \{5, 6\}$ die Menge der beiden höchsten Augenzahlen und $F = \{5\}$ der letzte Wurf.

- Alle Teilmengen einer Menge A bezeichnet man als Potenzmenge 2^A. Zur Potenzmenge gehört immer auch die leere Menge $\varnothing = \{\}$ (unmögliches Ereignis) und die Menge A selbst (sicheres Ereignis).

  Beispiel: $2^E = \{\varnothing, \{5\}, \{6\}, \{5, 6\}\} = \{\varnothing, \{5\}, \{6\}, E\}$

  oder $2^D = \{\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, D\}$



- Das Komplement $\bar{A} = \neg A$ (lies: „non oder nicht A“) einer Menge A sind alle Elemente, die nicht zu A gehören.

  Formal: $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$

  Beispiel: $\bar{D} = \{1, 3, 5\}, \bar{C} = \varnothing$

Mengenalgebra

- Der Durchschnitt $A \cap B$ (lies: „A geschnitten B“) zweier Mengen A und B ist definiert als die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören. Ist die Schnittmenge leer, so bezeichnet man beide Mengen als disjunkt (nicht überlappend).

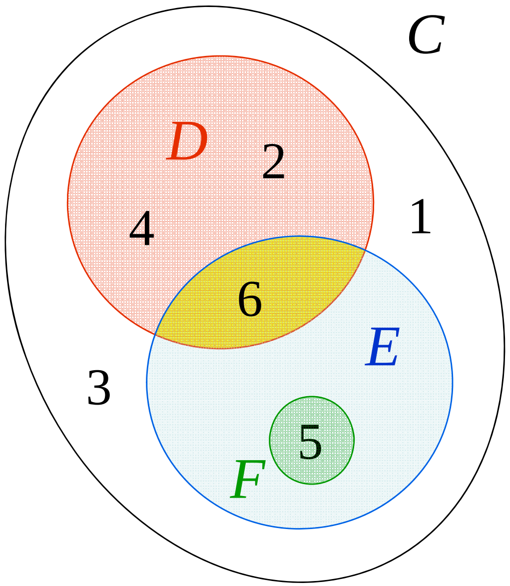
  Formal: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ mit $\wedge$ als Zeichen für „und“.

  Beispiele: $D \cap E = \{6\}$, $C \cap E = \{5, 6\} = E$ und $D \cap F = \varnothing$.

- Die Vereinigung $A \cup B$ (lies: „A vereinigt B“) zweier Mengen A und B ist definiert als die Menge aller Elemente, die entweder zu A oder zu B oder zu beiden Mengen gehören.

  Formal: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ mit $\vee$ als Zeichen für „mathematisches oder“.

  Beispiele: $D \cup F = \{2, 4, 5, 6\}$, $E \cup F = \{5, 6\} = E$.



- Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.

  Beispiel: $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x < 7\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Relationen

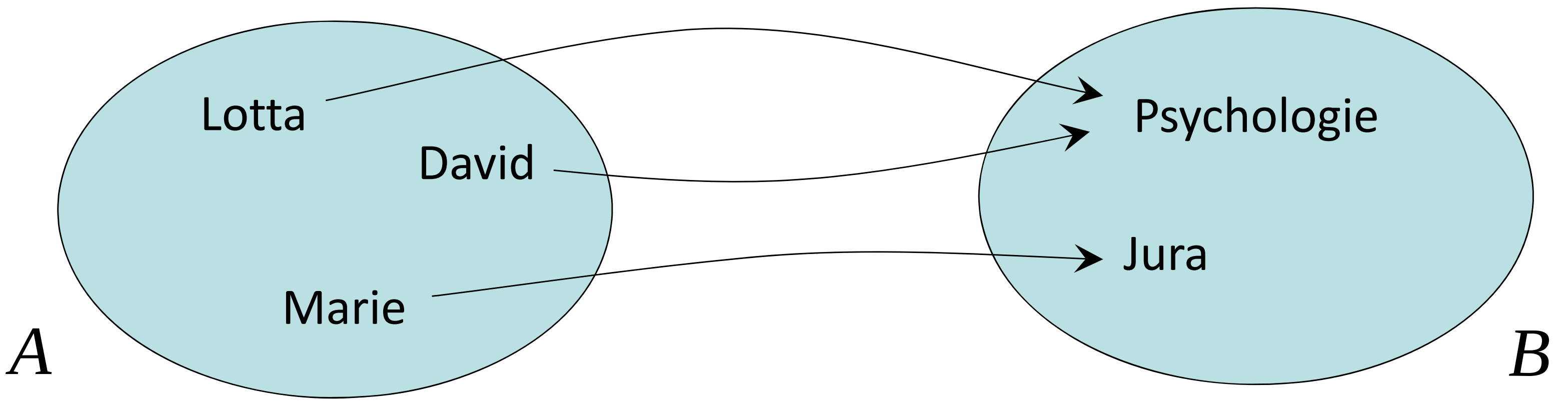
- Alle möglichen Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ bilden eine neue Menge, die man als kartesisches Produkt $A \times B$ bezeichnet. Hier ist hier also die Reihenfolge der Elemente von Bedeutung, d.h. im allgemeinen ist $(a, b) \neq (b, a)$. Es kann natürlich auch $A = B$ sein.
- Liegen allgemein n Mengen vor, so schreiben wir $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ und jedes Element wird als n-tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bezeichnet.
- Eine Teilmenge des kartesischen Produktes wird als Relation R bezeichnet. Für eine binäre Relation (d.h. bei zwei Mengen) schreibt man $(a, b) \in R$ oder einfacher $a\,R\,b$. Bei n Mengen liegt entsprechend eine n-stellige Relation vor.
- Beispiele: Es sei $A = \{\text{Lotta, Marie, David}\}$, $B = \{\text{Psychologie, Jura}\}$.
  - $A \times B = \{(\text{Lotta, Psychologie}), (\text{Marie, Psychologie}), (\text{David, Psychologie}), (\text{Lotta, Jura}), (\text{Marie, Jura}), (\text{David, Jura})\}$
  - Zuordnungsvorschrift „studiert" auf $A \times B$ führt z.B. zu: $R = \{(\text{Lotta, Psychologie}), (\text{Marie, Jura}), (\text{David, Psychologie})\}$
  - Zuordnungsvorschrift „hat gleiches Geschlecht" auf $A \times A$ führt zu: $R = \{(\text{Lotta, Lotta}), (\text{Marie, Lotta}), (\text{Lotta, Marie}), (\text{Marie, Marie}), (\text{David, David})\}$
  - (Kartesische) Koordinaten (x_i, y_i) der Punkte von Personen i in einem Streudiagramm mit Achsen X und Y, d.h. der Mengen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$A \times B = \begin{bmatrix} (\text{Lotta, Psy.}) & (\text{Lotta, Jura}) \\ (\text{Marie, Psy.}) & (\text{Marie, Jura}) \\ (\text{David; Psy.}) & (\text{David, Jura}) \end{bmatrix}$$

Relationen

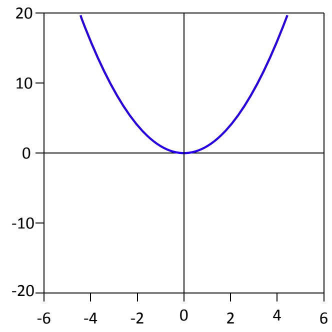
➢ Binäre Relationen können sein

- linkstotal: Jedes Element aus A steht zu mindestens einem Element aus B in Relation. ✓
- rechtstotal (= surjektiv): Jedes Element aus B steht zu mindestens einem Element aus A in Relation. ✓
- linkseindeutig (= injektiv): Kein Element aus B steht zu mehr als einem Element aus A in Relation. ✗
- rechtseindeutig: Kein Element aus A steht zu mehr als einem Element aus B in Relation. ✓
- eineindeutig (= bijektiv = umkehrbar eindeutig): Jedes Element aus B steht zu genau einem Element in A in Relation. ✗



- Eine Relation heißt Funktion (Abbildung, Transformation) f, wenn sie linkstotal und rechtseindeutig ist: Jedem Element der einen Menge X (x-Wert) wird genau ein Element der anderen Menge Y (y-Wert, Funktionswert) zugeordnet.
- Man schreibt: $y = f(x)$ bzw. $f: X \to Y, x \mapsto f(x)$
- X heißt dann Definitionsbereich und die auftretenden y-Werte der Wertebereich der Funktion f.

Funktion	Zusätzlich …	Beispiel 1	Beispiel 2
	-	X = Studierender Y = Geburtsort	$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
surjektiv (nicht injektiv)	rechtstotal	X = Studierender Y = Geschlecht	$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^2$
injektiv (nicht surjektiv)	linkseindeutig	X = Studierender Y = Matrikel-Nr.	$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
bijektiv	rechtstotal, linkseindeutig	X = Studierender Y = ?	$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$



- Ein Zufallsvorgang (Zufallsexperiment) ist ein wiederholbarer Prozess, der nach einer bestimmten Vorschrift ausgeführt wird und dessen Ergebnis (Ausgang) vom Zufall abhängt, also nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann.

- Die Menge aller möglichen (Zufalls-) Ergebnisse bezeichnen wir als Ergebnismenge Ω, deren Elemente als $\omega \in \Omega$ (beides: Omega): $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ bei k möglichen Ergebnissen.

- Häufig interessieren wir uns für Zusammenfassungen bestimmter Ergebnisse, die als (Zufalls-) Ereignisse bezeichnet werden und deren Menge A eine Teilmenge der Ergebnismenge darstellt: $A \subset \Omega$. Umfasst das Ereignis genau ein Element der Ergebnismenge, so bezeichnet man dies als Elementarereignis.

Zufallsvorgang	Ergebnismenge Ω	k	Mögliche Ereignisse
Wurf einer Münze	{Kopf, Zahl} = $\{K, Z\}$	2	Wurf ist Kopf: $\{K\}$
Ziehen einer Karte aus einem Skat-Kartenspiel	{♣Ass, ♠Ass, ♥Ass, ♦Ass, ♣König, ..., ♣7, ♠7, ♥7, ♦7}	32	Ziehen eines Königs: {♣König, ♠König, ♥König, ♦König}
Zweimaliger Wurf einer Münze	$\{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$	4	Mindestens einmal fällt Kopf: $\{(K, K), (K, Z), (Z, K)\}$

Wahrscheinlichkeitstheorie

- Die (a priori, unbedingte) (Auftretens) Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ordnet jedem Ereignis A eine Zahl zwischen 0 (unmögliches Ereignis) und 1 (sicheres Ereignis) zu.

- Nach Laplace kann man die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für ein Ereignis A unter der Voraussetzung, dass (endlich viele) gleich wahrscheinliche Elementarereignisse vorliegen (wie z.B. beim Münzwurf, der Lotterie etc.), in einem (Laplace-) Experiment bestimmen durch

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

- Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, bei einem fairen Würfel eine gerade Zahl zu Würfeln ist

$$P(A) = \frac{|\{\text{⚁}, \text{⚃}, \text{⚅}\}|}{|\{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\}|} = \frac{3}{6} = 0.5$$

- Bei vielen Anwendungen, vor allem wenn Zufallsvorgänge wiederholt werden und das Zufallsexperiment aus der Kombination von Einzelexperimenten besteht, sind die Wahrscheinlichkeiten nicht so einfach wie im Beispiel zu bestimmen. Man kann dann die im Folgenden beschriebenen Regeln der Kombinatorik einsetzen.

Kombinatorik

- Kombinatorische Aufgaben sind dadurch gekennzeichnet, dass man die Anzahl möglicher Ergebnisse bei einem k-fach wiederholten Zufallsexperiment bestimmen möchte.
  Die Menge weist n mögliche gleichwahrscheinliche Einzelergebnisse auf, woraus k mal nacheinander gezogen wird. Die Frage ist: Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es?

  Beispiel 1: Urne mit $n = 49$ Lotto-Kugeln, aus denen $k = 6$ Kugeln gezogen werden.

  Beispiel 2: Behälter mit Namen von $n = 30$ Schülern, aus denen $k = 2$ gezogen werden.

- Wenn wir die Anzahl möglicher Ergebnisse K kennen, ergibt sich - falls alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind - die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Ergebnis zu realisieren (z.B. den Lotto-Tipp 6-5-23-1-46-7), als Kehrwert dieser Anzahl $1/K$.

- Entscheidend für die Berechnungen sind zwei Fragen:
  - Spielt die Reihenfolge der gezogenen Ereignisse eine Rolle oder nicht? Am Beispiel:
    Ist "12-34-3-17-41-9" dasselbe Ergebnis wie "9-3-17-34-41-12" oder ist „G. Müller, N. Maier" dasselbe Ergebnis wie „N. Maier; G. Müller"?
  - Erfolgt die Ziehung mit Zurücklegen (Wiederholung) oder nicht? Am Beispiel:
    Wird die Kugel "12" bzw. „G. Müller" nach dem Ziehen wieder in die Urne zurückgelegt (und kann dann erneut gezogen werden) oder nicht?

Kombinatorik

➢ Die beiden Merkmale lassen sich miteinander kombinieren und es resultieren vier mögliche Problemkonstellationen, die durch jeweils ein Beispiel veranschaulicht werden:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
Reihenfolge bedeutsam	1 Wie wahrscheinlich ist es, dass beim dreimaligen Münzwurf „Kopf-Zahl-Kopf“ fällt?	2 Wie wahrscheinlich ist es, aus einem Skatspiel nachein-ander die Karten Kreuz Ass und Pik Ass zu ziehen?
Reihenfolge nicht bedeutsam	4 Wie viele Zahlen gibt es, wenn die Zahl aus den absteigend sortierten Augen bei dreimali-gem Würfeln entsteht?	3 Wie wahrscheinlich ist es, beim Lotto (6 aus 49) einen richtigen Tipp abzugeben?




- Fall ❶: Wie viele Ergebniskombinationen gibt es, wenn die Reihenfolge bedeutsam ist und die Objekte zurückgelegt werden?

- Beispiele:
  - Wie wahrscheinlich ist es, dass beim dreimaligen Münzwurf „Kopf-Zahl-Kopf“ fällt?
  - Wie wahrscheinlich ist es, beim viermaligen Würfeln die Reihenfolge 1-2-3-4 zu erhalten?

- Bei der Münzwurf-Aufgabe gibt es bei jedem Wurf $n = 2$ Möglichkeiten und damit bei $k = 3$ Würfen $n \cdot n \cdot n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 = n^3$ verschiedene Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit, dass „Kopf-Zahl-Kopf“ fällt, ist entsprechend $1/8 = 0.125$.

- Allgemein ergeben sich bei n möglichen Einzelergebnissen und k zufälligen Ziehungen $K = n^k$ mögliche Ergebnisse bzw. eine Auftretenswahrscheinlichkeit für eines der Ergebnisse von $1/K$.

Ergebnismenge Münzwurf-Beispiel (mit 8 Tripeln):
$M = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, K), (K, Z, Z), (Z, K, K), (Z, K, Z), (Z, Z, K), (Z, Z, Z)\}$

- Im zweiten Beispiel resultiert entsprechend:

  $K = n^k = 6^4 = 1296$. Die Wahrscheinlichkeit für die Würfelsequenz 1-2-3-4 beträgt also $1 / 1296 = 0.0008$, also nur etwa 0.08 Prozent.

- Fall ❷: Wie viele Ergebniskombinationen gibt es, wenn die Reihenfolge bedeutsam ist und die Objekte nicht zurückgelegt werden?

- Beispiel: Wie wahrscheinlich ist es, aus einem Skatspiel nacheinander die Karten Kreuz Ass und Pik Ass zu ziehen?

- Dazu benötigen wir zunächst die Zahl der möglichen Ereigniskombinationen, wenn n Einzelergebnisse existieren. Sie beträgt $n!$ (lies „n Fakultät"):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

$\boxed{\text{Es gilt ferner: } 0! = 1}$

n Objekte können also in $n!$ verschiedene Abfolgen (Permutationen) gebracht werden.

- Im Beispiel ergeben sich 32 Möglichkeiten für die erste Karte und 31 Möglichkeiten für die zweite Karte, also $32 \cdot 31 = 992$ Möglichkeiten, also eine Wahrscheinlichkeit von $1 / 992 = 0.001$ für die gesuchte Kartenkombination (und jede andere Kombination aus $k = 2$ Karten).

- Allgemein ergeben sich bei n möglichen Einzelergebnissen und k zufälligen Ziehungen die folgende Zahl an möglichen Ergebnissen:

$$K = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Im Beispiel: $$K = \frac{32!}{(32-2)!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot \cancel{30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}} = 32 \cdot 31 = 992$$

- Fall ❸: Wie viele Ergebniskombinationen gibt es, wenn die Reihenfolge nicht bedeutsam ist und die Objekte nicht zurückgelegt werden?

- Beispiel: Wie wahrscheinlich ist es, beim Lotto (6 aus 49) einen richtigen Tipp abzugeben?

- Dazu benötigen wir die Zahl der Möglichkeiten, aus n Objekten Gruppen der Größe k zu bilden. Diese Größe wird als Binomialkoeffizient bezeichnet und ist wie folgt definiert (lies: „n über k“):

$$K = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Im Beispiel: $$\frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816$$

Die Chance ist also geringer also 1:13 Millionen oder 0.000000071.

- Häufiger stellt sich in Studien die Frage, wie viele verschiedene Paare man bei n Objekten bilden kann. Die Antwort ergibt sich als Spezialfall des Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Kombinatorik

- Fall ❹: Wie viele Ergebniskombinationen gibt es, wenn die Reihenfolge nicht bedeutsam ist und die Objekte zurückgelegt werden?

- Beispiel: Sie würfeln drei Mal, sortieren die gewürfelten Zahlen nach der Größe und bilden so eine neue Zahl (z.B. 3-1-2 $\Rightarrow$ 321). Wie viele Zahlen sind als Ergebnis möglich?

- Allgemein ergeben sich bei n möglichen Einzelergebnissen und k zufälligen Ziehungen die folgende Zahl an möglichen Ergebnissen:

$$K = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$$

- Im Beispiel:

$$K = \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\cdot(8-3)!} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$$

Es gibt also 56 mögliche Zahlen.

<u>Hinweis</u>: Das Auftreten dieser 56 Zahlen ist allerdings nicht gleichwahrscheinlich, da etwa die Zahl 221 durch drei gewürfelte Reihenfolgen entstehen könnte (2-2-1, 2-1-2 oder 1-2-2), während z.B. die Zahl 111 nur durch den Würfelwurf 1-1-1 entstehen kann. Eine simple Kehrwertbildung ($1/K = 1/56$) zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Zahl, wäre daher falsch.

- Bei n möglichen Einzelergebnissen und k zufälligen Ziehungen wird die Zahl an möglichen Ergebnissen also wie folgt berechnet:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
Reihenfolge bedeutsam	1 $K = n^k$	2 $K = \frac{n!}{(n-k)!}$
Reihenfolge nicht bedeutsam	4 $K = \binom{n+k-1}{k}$	3 $K = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Wenn wir die Anzahl möglicher Ergebnisse K kennen, ergibt sich - falls alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind - die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Ergebnis zu realisieren, als Kehrwert dieser Anzahl $1 / K$.

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Gliederung

- Für den allgemeineren Fall hat Kolmogorov drei Axiome (nicht beweisbare Setzungen) formuliert, die die Zuordnung von Zahlen zu Ereignissen erfüllen müssen, um als Wahrscheinlichkeiten zu gelten.

- Die Potenzmenge 2^{Ω} als die Menge aller möglichen Ereignisse einer Ergebnismenge Ω lautet beispielsweise für den Münzwurf mit den Ergebnissen K = Kopf und Z = Zahl:

$$2^{\Omega} = \{\varnothing, K, Z, \{K, Z\}\} = \{\varnothing, K, Z, \Omega\}$$

- Die Wahrscheinlichkeit weist nun jedem Element dieser Potenzmenge eine reelle Zahl zu, die nach Kolmogorov folgende Eigenschaften aufweisen muss:

  - Axiom 1: $P(A) \geq 0$ für alle $A \subset 2^{\Omega}$
  - Axiom 2: $P(\Omega) = 1$, d.h. die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1.
  - Axiom 3: Für alle Teilmengen A und B aus Ω, die disjunkt sind (d.h. $A \cap B = \varnothing$) , gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- Aus den Axiomen folgt unter anderem, dass Wahrscheinlichkeiten immer im Bereich von 0 und 1 liegen ($0 \leq P(A) \leq 1$) und komplementäre Ereignisse eine komplementäre Wahrscheinlichkeit aufweisen: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- Beispiel: Zufälliges Ziehen einer Karte aus einem Skat-Kartenspiel mit $k = 32$ Karten.

  Betrachtete Ereignisse: A = {Ass}, B = {Pik}

- Für die a priori Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$P(A) = 4/32 = 1/8 = 0.125$$

$$P(B) = 8/32 = 1/4 = 0.25$$

$$P(\bar{A}) = 28/32 = 7/8 = 0.875 = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{B}) = 24/32 = 3/4 = 0.75 = 1 - P(B)$$

A ↓

		Ass	K	D	B	10	9	8	7	
	♣									
B →	♠									8/32
	♥									
	♦									
		4/32								

- Mann kann die möglichen Kombinationen des (Nicht-) Auftretens der beiden Ereignisse anschaulich in einem Vierfelderschema anordnen.

- Dabei trägt man die apriori Wahrscheinlichkeiten als Randwahrscheinlichkeiten ein und ergänzt die Wahrscheinlichkeiten $P(X \cap Y)$ des gemeinsamen Auftretens von X und Y in den Zellen.

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	

- Beispiel:

	Pik	kein Pik	
Ass	1/32	3/32	1/8
kein Ass	7/32	21/32	7/8
	1/4 = 8/32	3/4	

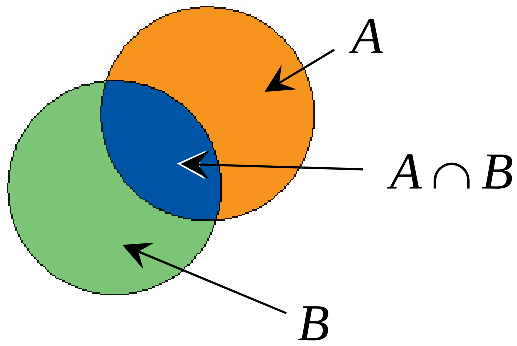
A

B		Ass	K	D	B	10	9	8	7
	♣								
B	♠	×							
	♥								
	♦								

- Für die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B)$, dass mindestens eines der beiden Ereignisse A oder B eintritt, gilt auf der Basis der Axiome (Additionstheorem):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Hier liegt also im Gegensatz zu den Bedingungen des 3. Axioms der allgemeine Fall vor, in dem A und B nicht disjunkt sind. In diesem Fall muss von den Einzelwahrscheinlichkeiten noch $P(A \cap B)$ subtrahiert werden. Nur wenn beide Ereignisse disjunkt sind gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

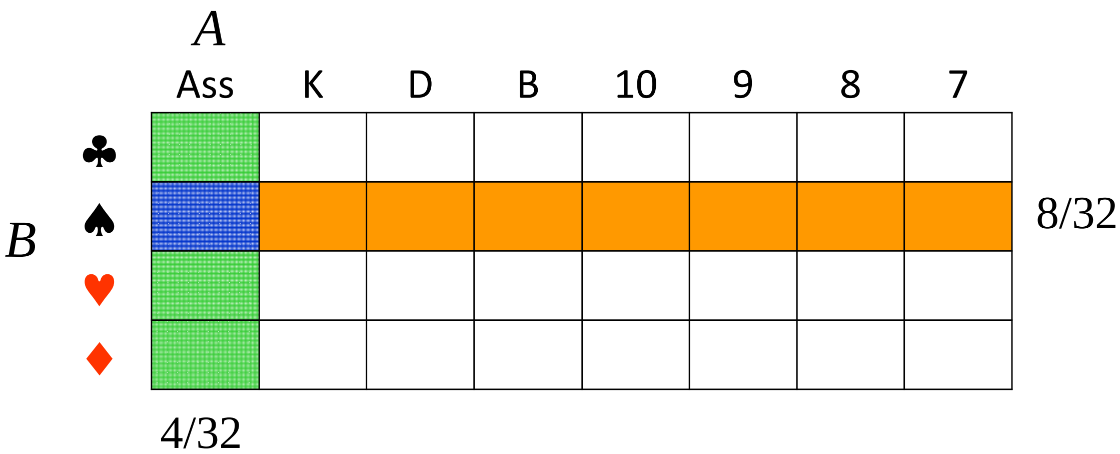


- Beispiel:

$$P(A \cup B) = 4/32 + 8/32 - 1/32$$
$$= 11/32 = 0.344$$

$$P(\bar{A} \cup B) = 28/32 + 8/32 - 7/32$$
$$= 29/32 = 0.906$$

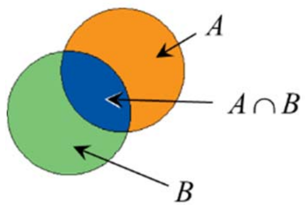
...



- Manchmal hilft die Kenntnis darüber, dass ein Ereignis B eingetreten ist (oder sicher eintreten wird), bei der Vorhersage, ob A eintreten wird. Die Eintretenswahrscheinlichkeit von A, wenn bekannt ist, dass B sicher eintritt, bezeichnet man als bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ (lies: „A gegeben B“ oder „A unter der Voraussetzung/Bedingung B“), auch bezeichnet als a posteriori Wahrscheinlichkeit.

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit hängt mit der Wahrscheinlichkeit, dass A und B gemeinsam auftreten $P(A \cap B)$ und der a priori Wahrscheinlichkeit $P(B) > 0$ wie folgt zusammen:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



- Gilt $P(A \mid B) = P(A)$, so sagt man, dass A und B unabhängig sind. In diesem Fall ändert die Kenntnis des Eintretens von B die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A nicht. Die a posteriori (bedingte) Wahrscheinlichkeit entspricht dann der a priori (unbedingten) Wahrscheinlichkeit. Nur in diesem Fall der Unabhängigkeit gilt auch:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- **Beispiel**: Es seien A = {Pik Ass}, B = {Pik}, C = {Ass}. $P(A) = 1/32$, $P(B) = 1/4$, $P(C) = 1/8$

$$P(A|B) = 1/8$$

$$P(A|C) = 1/4$$

$$P(C|B) = 1/8 = P(C)$$

	Ass	K	D	B	10	9	8	7
♣								
♠	x							
♥								
♦								

- Vor allem $P(A|B)$ und $P(A \cap B)$ sind nicht zu verwechseln!

$$P(A|B) = 1/8, \quad P(A \cap B) = 1/32, \quad P(B|A) = 1/1$$

- Aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

folgt durch Umstellung, dass

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

und entsprechend

$$P(A|B) = P(B|A) \cdot P(A) \,/\, P(B)$$

$$= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

$$\boxed{P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:
Für m disjunkte Ereignisse A_i gilt:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

was als Satz von Bayes bezeichnet wird. Man kann also die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten ineinander umrechnen und $P(A|B)$ auch bestimmen, ohne $P(B)$ zu kennen.

- Beispiel: Der Student M. lernt in einer Kneipe die Studentin C. kennen. Er weiß, dass insgesamt 60% der Studierenden in Osnabrück und 75% der Psychologie-Studierenden weiblich sind und dass 1 Studierender von 20 in Osnabrück Psychologie studiert. Wie wahrscheinlich ist es, dass C. Psychologie studiert?

- Gegeben für Ereignisse: A = {x studiert Psychologie} und B = {x ist weiblich} :
  - $P(A) = .05$ (5% der Studierenden in OS studieren Psychologie)
  - $P(B) = .60$ (60% der Studierenden in OS sind weiblich)
  - $P(B|A) = .75$ (unter den Psychologie-Studierenden sind 75% weiblich)

- Gesucht: $P(A|B)$ … Wahrscheinlichkeit, dass eine Studentin das Fach Psychologie studiert.

- Einsetzen in Formel für Satz von Bayes liefert unmittelbar das Ergebnis:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0.75 \cdot 0.05}{0.60} = 0.0625$$

- Die Wahrscheinlichkeit ist also etwas mehr als 6%, dass C. Psychologie studiert.

- Häufig sind die apriori Wahrscheinlichkeiten nicht theoretisch über ein Laplace-Experiment zu bestimmen, sondern unbekannt.

- In diesem Fall lassen sich die Wahrscheinlichkeiten über relative Häufigkeiten $f(A)$ schätzen:

  $$\hat{P}(A) = f(A)$$

- Die relative Häufigkeit wird dabei umso näher an der unbekannten Wahrscheinlichkeit liegen, je größer die Zahl der Beobachtungen ist, auf der sie basiert (Bernoulli-Theorem).

- Dies kann man wie rechts an einem Münzwurf verdeutlichen: Rechts wurde 100 Mal eine Münze geworfen und nach jedem Durchgang die relative Häufigkeit von „Kopf" $f(K)$ abgetragen.