Induktive Statistik

(Signifikanztests)

Aufgabe 70: (Aufgabe 7.1 im Skript)

Von einer Brotfirma werden Brötchen produziert. Die Firma verspricht, dass das durchschnittliche Gewicht der Brötchen 50 Gramm beträgt. Das Brötchengewicht X sei normalverteilt mit einer Varianz von 1.44 g^2.

Bei einer Stichprobe von 25 Brötchen ist ein mittleres Gewicht von $\bar{x} = 49.5$g festgestellt worden. Stützt der Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ bei einem Signifikanzniveau von 5% die Angaben der Brotfirma?

Aufgabe 71: (Aufgabe 7.2 im Skript)

Bei einem Test einer neu angeschafften Flaschenabfüllanlage wird der Brauerei eine mittlere Abfüllmenge von 0.5 l bei einer Standardabweichung von $\sigma = 0.03$ l garantiert. Eine Stichprobe von $n = 40$ Flaschen aus einer 10 minütigen Produktionsgesamtheit von 500 Flaschen ergab eine durchschnittliche Biermenge pro Flasche von 0.49 l.

(a) Kann man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% davon ausgehen, dass die mittlere Abfüllmenge geringer ist als vom Hersteller der Anlage angegeben?

(b) Bei welchem α-Niveau wird die unter (a) betrachtete Hypothese noch abgelehnt?

Aufgabe 72: (Aufgabe 7.3 im Skript)

Auf Verpackungen eines Batterietyps wird eine durchschnittliche Lebensdauer von 280 Stunden angegeben. Eine Qualitätskontrolle ($n = 36$) führt zu folgenden Ergebnissen:

269	300	268	278	282	263
301	295	288	278	276	286
296	265	271	279	284	260
275	282	260	266	270	293
272	285	293	281	269	299
263	264	273	291	274	277

(a) Muss der Hersteller die Angaben korrigieren (Signifikanzniveau 1%)?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese nicht verworfen wird, wenn sie falsch ist? (Arbeiten Sie mit $\bar{x}$.)

INDUKTIVE STATISTIK - ÜBUNG

Aufgabe 66 (Klausurrelevant)

Vergleichen Sie MSE von

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{x})^2$$

$$S^2_{ML} = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{x})^2$$

$$MSE(\hat{\theta}_n) := E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$$
$$= Var[\hat{\theta}_n] + (E[\hat{\theta}_n] - \theta)^2$$

für einen Schätzer $\hat{\theta}_n$ von θ

S^2 und S^2_{ML} sind Schätzer für σ^2

$$MSE(S^2) = Var[S^2] + (\overbrace{E[S^2] - \sigma^2}^{=0})^2$$

Wir wissen, dass S^2 erwartungstreu ist, also

$E[S^2] = \sigma^2 \Rightarrow E[S^2] - \sigma^2 = 0$ gilt bei $x_1, \dots, x_n$ normalverteilt

Außerdem wissen wir (Folien) $\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}}$

und dass die Varianz von einer χ^2_n-verteilten Zufallsvariable $2n$ ist.

$$\Rightarrow Var\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1)$$

$(\dots)^2$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} Var[S^2] = 2(n-1)$$

$$\Rightarrow Var[S^2] = \frac{2}{n-1}\sigma^4$$

$$\Rightarrow MSE[S^2] = \frac{2}{n-1} + \sigma^4$$

Für S^2_{ML} sehen wir, dass $S^2_{ML} = \frac{n-1}{n} \cdot S^2$

$$Var[S^2_{ML}] = Var\left[\frac{n-1}{n} S^2\right]$$

$(\dots)^2$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^2} Var[S^2] = \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n-1}\sigma^4 = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

$$(E[S^2{}_{ML}] - \sigma^2) = (E[\tfrac{n-1}{n} S^2] - \sigma^2)^2$$
$$= (\tfrac{n-1}{n} E[S^2] - \sigma^2)^2$$
$$= (\tfrac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2)^2 = (-\tfrac{1}{n} \sigma^2)^2 = \tfrac{1}{n^2} \sigma^4$$

$$MSE(S^2_{ML}) = Var[S^2_{ML}] + (E[S^2_{ML}] - \sigma^2)^2$$
$$= \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4 + \frac{1}{n^2} \cdot \sigma^4$$
$$= \frac{2n-1}{n^2} \sigma^4$$

Welcher MSE ist größer?

Behauptung: $MSE(S^2) > MSE(S^2_{ML})$

$$\frac{2}{n-1} \cancel{\sigma^4} > \frac{2n-1}{n^2} \cancel{\sigma^4} \qquad | \cdot n^2 \cdot (n-1)$$

$$2n^2 > (2n-1)(n-1)$$
$$\cancel{2n^2} > \cancel{2n^2} - 3n + 1$$
$$0 > -3n + 1$$

Aufgabe 69

σ^2 unbekannt, gesucht ist das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall

$$P[\bar{X} - t(1-\tfrac{\alpha}{2}, n-1) \cdot \tfrac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t(1-\tfrac{\alpha}{2}, n-1) \cdot \tfrac{S}{\sqrt{n}}] = 1-\alpha$$

$n = 200$, $\bar{x} = 25$, $s^2 = 128$, $\alpha = 0.05$

$$\leadsto \mu \in [\bar{x} - t(1-\tfrac{\alpha}{2}, n-1)\tfrac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t(1-\tfrac{\alpha}{2}, n-1) \tfrac{s}{\sqrt{n}}]$$

$$\Rightarrow \mu \in [25 - 1{,}972 \cdot \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{200}} ; 25 + 1{,}972 \cdot \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{200}}]$$

$$\Rightarrow \mu \in [23{,}422 ; 26{,}578]$$

Das wahre μ wird mit Wsk. $1-\alpha = 0{,}95$ vom obigen Konfidenzintervall überdeckt

Hypothesentest – „Rezept" / Schema

(1) Null -/ Alternativhypothese
(2) Signifikanzniveau
(3) Auswahl d. Teststatistik und des Ablehnungsbereichs
(4) Berechnung des Testwerts & Entscheidung

Aufgabe 70
(1) $H_0: \mu = 50$ $H_1: \mu \neq 50$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
(2) $\alpha = 0{,}05$
(3) $\sigma^2 = 144$ bekannt

Ablehnungsbereich
$I_\alpha = \{ |z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \}$

(4) $\bar{x} = 49{,}5$
$\sigma^2 = 1{,}44$
$n = 25$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{49{,}5 - 50}{\sqrt{1{,}44} / \sqrt{25}} = -2{,}0833$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = \text{qnorm}(0.975) = 1{,}96$$

Testentscheidung $|z| > 1{,}96$
$\Rightarrow$ Wir verwerfen die Nullhypothese