

Probeklausur Lösung

A1) Ω Ereignisraum, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ Familie von σ -Algebren auf Ω , $I \neq \emptyset$.

a) Beh $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ist σ -Algebra

Bew (i) da $\mathcal{A}_i$ σ -Algebra ist, gilt $\Omega \in \mathcal{A}_i \forall i \in I$

$$\Rightarrow \Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I$ (d.h. $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$)

$$\stackrel{\text{d. } \sigma\text{-Alg.}}{\Rightarrow} A^c \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \Leftrightarrow A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

(iii) Seien $A_1, A_2, \dots \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

$$\Leftrightarrow: A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_i \forall i \in I$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_i \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

b) Beh $\mathcal{S} := \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$
ist σ -Algebra

Bew (i) $\emptyset$ besitzt kein Element und ist somit abzählbar, also ist $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{S}$

(ii) Sei $A \in \mathcal{S}$, d.h. A oder A^c ist abzählbar
also ist $(A^c)^c$ oder A^c abzählbar

$$\Leftrightarrow: A^c \in \mathcal{S}$$

(iii) Seien $A_1, A_2, \dots \in S$

1. Fall : alle A_i sind abzählbar
dann ist auch deren ^{abz. b.} Vereinigung abzählbar, d.h. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$

2. Fall : $\exists i_0 : A_{i_0}$ nicht abzählbar

$$\text{dann } \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \subset A_{i_0}^c$$

und da $A_{i_0}^c$ nach Def. von S abzählbar sein muss, ist auch $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c$ abzählbar

also $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$.

A2) A : "Es regnet", A^c : "Es regnet nicht"
 B : "Regen vorausgesagt"
 B^c : "Regen nicht vorausgesagt"

Wir wissen $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A^c) = \frac{2}{3}$
 $P(B|A) = \frac{2}{3}$, $P(B^c|A^c) = \frac{3}{4}$

a) gesucht: $P(B)$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \\ &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\ &= P(B|A)P(A) + (1 - P(B^c|A^c))P(A^c) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{2}{12} = \frac{7}{18} \end{aligned}$$

b) gesucht: $P(A|B)$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{18}{7} \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

A3) $F \vee \bar{F}$ einer reellen ZV X .

Sei S die Menge der Sprungstellen von F

a) Beh S ist abzählbar

Bew Sei $A_k := \{x \in \mathbb{R} : F(x) - \lim_{x' \uparrow x} F(x') \geq \frac{1}{k}\}$, $k \in \mathbb{N}$

dann gilt wegen $0 \leq F(x) \leq 1$, dass

$$|A_k| \leq k$$

und ferner

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$\Rightarrow S$ ist abzählb. Vereinigung abzählbarer Mengen (sogar endl.) und somit abzählbar

b) Beh X ist diskret verteilt ($\Rightarrow$)

$$\sum_{x \in S} \{F(x) - F(x-)\} = 1$$

Bew " $\Rightarrow$ " X diskret vert.

$$\Rightarrow S = \{x \mid F(x) - F(x-) \neq 0\} = \{x : P(X=x) \neq 0\}$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in S} (F(x) - F(x-)) = \sum_{x \in S} P(X=x) \stackrel{\uparrow}{=} 1$$

X diskret vert

$$" $\Leftarrow$ " $\sum_{x \in S} (F(x) - F(x-)) = 1$$$

$$\Rightarrow P_X(S) = 1 \quad \text{und} \quad P_X(S^c) = 0$$

$\Rightarrow X: \Omega \rightarrow S$ und S ist nach
Teil a) abzählbar

$\Rightarrow X$ ist diskret verteilt

$$A6) X \sim \text{Poi}_\mu, Y \sim \text{Poi}_\nu$$

$$a) \text{ Bek } G_X(s) = e^{\mu(s-1)}, G_Y(s) = e^{\nu(s-1)}$$

$$\text{und } G_Z(s) = G_{X+Y}(s) = e^{(\mu+\nu)(s-1)}, \text{ also}$$

$$Z \sim \text{Poi}_{\mu+\nu}$$

$$\begin{aligned} \text{Bew } G_X(s) &= E(s^X) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu} s^j \\ &= e^{-\mu} e^{\mu s} \\ &= e^{\mu(s-1)} \end{aligned}$$

$$G_Y(s) = \dots (\text{analog}) \dots = e^{\nu(s-1)}$$

Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt nach Bem 1.4.14 und Prop. 1.7.7 c)

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s) = e^{\mu(s-1)} e^{\nu(s-1)} \\ &= e^{(\mu+\nu)(s-1)} \end{aligned}$$

Th. 1.82.6)

$$\Rightarrow Z \sim \text{Poi}_{\mu+\nu}$$

$$b) E(Z) = G'_Z(1) \text{ und } \text{Var}(Z) = G''_Z(1) + G'_Z(1) - (G'_Z(1))^2$$

$$\text{dazu: } G'_Z(s) = (\mu+\nu) e^{(\mu+\nu)(s-1)}$$

$$G''_Z(s) = (\mu+\nu)^2 e^{(\mu+\nu)(s-1)}$$

$$\Rightarrow E(Z) = \mu + \nu$$

$$\text{Var}(Z) = (\mu+\nu)^2 + (\mu+\nu) - (\mu+\nu)^2 = \mu + \nu$$

A5) $X \sim \text{Uni}[0,1]$, Z_n besitze

Dichte $f_{Z_n}(x) = (n-1) \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x) + \mathbb{1}_{[1-\frac{1}{n}, 1]}(x)$

Sei $Y_n := X + Z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Beh $Y_n \xrightarrow{IP} X$

Bew o.E. sei $0 < \varepsilon < 1$. Dann gibt es ein N , s.d.

$\forall n \geq N$ gilt: $\frac{1}{n} < \varepsilon$ und $\frac{1}{n} < 1 - \varepsilon$

$$\begin{aligned} \Rightarrow IP(|Y_n - X| \geq \varepsilon) &= IP(|Z_n| \geq \varepsilon) \\ &= IP(Z_n \geq \varepsilon) = IP(Z_n \in [1 - \frac{1}{n}, 1]) \\ &= \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

b) Beh $Y_n \not\xrightarrow{IP} X$, aber $Y_{2n} \xrightarrow{P.f.s.} X$

Bew sei $0 < \varepsilon < 1$ beliebig.

Def. $A_n := \{|Y_n - X| \geq \varepsilon\} = \{|Z_n| \geq \varepsilon\}$

dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_n| \geq \varepsilon)$

$$\geq \sum_{\substack{n: \frac{1}{n} < \varepsilon, \\ \frac{1}{n} < 1 - \varepsilon}} P(|Z_n| \geq \varepsilon) = \sum_{\substack{n: \frac{1}{n} < \varepsilon, \\ \frac{1}{n} < 1 - \varepsilon}} \frac{1}{n} = \infty$$

also tritt das Ereignis $\{|Y_n - X| \geq \varepsilon\}$ mit W'keit 1 unendl. oft ein, da die Z_n und somit die A_n unabh. sind und das zweite Borel-Cantelli-Lemma angewendet werden kann

Ferner bedeutet dies

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |Y_n - X| \geq \varepsilon \quad \text{IP-f.s.}$$

dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, somit kann Y_n nicht gegen X mit W'keit 1 konvergieren.

Für die Teilfolge $n_k = 2^k$ gilt jedoch

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \dots (\text{analog}) \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$$

und nach dem ersten Borel-Cantelli-Lemma gilt

$|Y_n - X| \geq \varepsilon$ höchstens endl. oft
mit W'keit 1. also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |Y_n - X| \leq \varepsilon \quad \text{IP-f.s.} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Wenn man den abzählbaren Schritt über alle rationalen $\varepsilon > 0$ nimmt, haben wir

$$\begin{aligned} P(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = X) &= P\left(\bigcap_{\substack{\varepsilon > 0, \\ \text{rat.}}} \underbrace{\limsup_{n \rightarrow \infty} |Y_n - X| \leq \varepsilon}_{1\text{-Menge}}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

also

$$Y_n \rightarrow X \quad \text{IP-f.s.}$$

Bemerkung Ihr könnt noch erwähnen, dass man hier $Y_n(\omega)$

nicht genau spezifiziert (obwohl $Y_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ gezeigt werden soll), die Vert.-annahme für Y_n jedoch ausreicht, in diesem Fall

A6) $Y_1, Y_2, \dots$ iid mit $P(Y_i = 1) = p = 1 - P(Y_i = -1)$
 $(0 < p < 1)$

Beh (X_n) mit $X_n = Y_1 \cdots Y_n$ ist eine (homogene) Markov-Kette

Bew X_n nimmt nur Werte auf $\{-1, 1\}$ an
 Seien $i_1, \dots, i_n, i_{n+1} \in \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1) \\ & \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{P(Y_{n+1} = \frac{i_{n+1}}{i_n}, Y_n = \frac{i_n}{i_{n-1}}, \dots, Y_2 = \frac{i_2}{i_1}, Y_1 = i_1)}{P(Y_n = \frac{i_n}{i_{n-1}}, \dots, Y_2 = \frac{i_2}{i_1}, Y_1 = i_1)} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{unabh.}}{=} \frac{P(Y_{n+1} = \frac{i_{n+1}}{i_n}) P(Y_n = \frac{i_n}{i_{n-1}}) \cdots P(Y_1 = i_1)}{P(Y_n = \frac{i_n}{i_{n-1}}) \cdots P(Y_1 = i_1)}$$

$$\begin{aligned} (*) & \stackrel{\text{unabh.}}{=} P(Y_{n+1} = \frac{i_{n+1}}{i_n}) = P(Y_{n+1} = \frac{i_{n+1}}{i_n}) \cdot \frac{P(Y_n \cdots Y_1 = i_n)}{P(Y_n \cdots Y_1 = i_n)} \\ & \stackrel{\text{unabh.}}{=} P(Y_{n+1} Y_n \cdots Y_1 = i_{n+1} | Y_n \cdots Y_1 = i_n) \\ & = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) \end{aligned}$$

Da die Y_n identisch verteilt sind kann man in (*) auch $P(Y_2 = \frac{i_{n+1}}{i_n})$ schreiben und erhält die Homogenität.

Die Übergangsmatrix ist somit

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{nach } -1 \\ \text{von } -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$=(\pi_1, \pi_2)$

b) Für die stationäre Verteilung π von P muss gelten:

$$\pi = \pi P$$

$$\begin{aligned} (=) \quad p \pi_1 + (1-p) \pi_2 &= \pi_1 \\ (1-p) \pi_1 + p \pi_2 &= \pi_2 \end{aligned} \quad (*)$$

$$\text{und} \quad \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad (**)$$

$$\text{aus } (*) \text{ folgt } \pi_1 = \pi_2$$

$$\text{und aus } (**) \text{ folgt } \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$$

also

$$\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

		A(7)						A(θ)
θ \ x	0	1	2	3	4	5		
0	1.	0	0	0	0	0		{0}
1	0.167.	0.833.	0	0	0	0		{0,1}
2	0.047	0.476.	0.476.	0	0	0		{1,2}
3	0.018	0.268.	0.536.	0.179.	0	0		{1,2,3}
4	0.008	0.159.	0.476.	0.317.	0.040	0		{1,2,3}
5	0.004	0.099.	0.397.	0.397.	0.099.	0.004		{1,2,3,4}
6	0.002	0.065	0.325.	0.433.	0.162.	0.013		{2,3,4}
7	0.001	0.044	0.265.	0.442.	0.221.	0.026		{2,3,4}
C(x)	{0,1}	{1,2,...,5}	{2,3,...,7}	{3,4,...,7}	{5,6,7}	∅		

Für festes θ betrachte man alle $P_\theta(x)$. Man nummeriere $x_1, x_2, \dots$ so, dass

$$P_\theta(x_1) \geq P_\theta(x_2) \geq \dots$$

und wähle $A(\theta) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ mit minimalem k derart, dass $P_\theta(A(\theta)) \geq 1 - \alpha$

In dem Fall gilt dann $\theta \in C(x) \Leftrightarrow x \in A(\theta)$

Im konkreten Beispiel oben wurde also in jeder Zeile die größte Zahl zuerst, dann die zweite usw. mit einem Punkt versehen, bis für die Summe $\geq 1 - \alpha$ gilt. Für jedes x ist dann $C(x)$ die Vereinigung aller Zahlen (θ, x) , die mit einem Punkt versehen wurden.

(Vgl. Krengel "Einführung in d. W'theorie & Statistik", Bsp 4.4)

18) $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. mit $F(x) = P(X_1 \leq x)$

a) Beh $X_{r:n}$ besitzt die VF

$$F_r(x) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} (F(x))^k (1-F(x))^{n-k}$$

Bew Es gilt $F_r(x) = P(X_{r:n} \leq x) = P(\text{mind. } r \text{ der } X_i \leq x)$
 $= P\left(\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} \geq r\right)$

Da ^{die} X_i unabh. und id. vert $\Rightarrow (1_{\{X_i \leq x\}})_{i \in \mathbb{N}}$ unabh. & identisch Bernoulli-verteilt mit Parameter $p = P(1_{\{X_1 \leq x\}} = 1) = P(X_1 \leq x) = F(x)$
 Wegen der Unabh.keit ist daher

$$\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} \sim B_{n, F(x)} \text{ - verteilt.}$$

$$\Rightarrow F_r(x) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} (F(x))^k (1-F(x))^{n-k}$$

b) zur Dichte: Sei F diffbar.

Durch differenzieren erhält man die Dichte

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} k (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x) \\ &\quad - \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} (n-k) (F(x))^k (1-F(x))^{n-k-1} f(x) \\ &= \binom{n}{r} r (F(x))^{r-1} (1-F(x))^{n-r} f(x) + \sum_{k=r+1}^n \binom{n}{k} k F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x) \\ &\quad - \sum_{k=r+1}^n \binom{n}{k-1} (n-k+1) (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x) \end{aligned}$$

Wegen $\binom{n}{k} k = \binom{n}{k-1} (n-k+1)$ folgt

$$f_r(x) = \binom{n}{r} r (F(x))^{r-1} (1-F(x))^{n-r} f(x)$$

A9) $P_\theta(N=n) = \theta(1-\theta)^{n-1}$ (also geom. vert.)

Bestimme Neyman-Pearson-Test z. Niveau $\alpha=0.05$

a) für $H_0: \theta = \frac{1}{2} =: \theta_0, H_1: \theta = \frac{1}{4} =: \theta_1$

Der Test hat nach (1) auf dem Aufgabenblatt die Form

(*)
$$\varphi^*(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } P_{\theta_1}(N=n) \geq c P_{\theta_0}(N=n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $E_{\theta_0} \varphi^*(N) = 0.05 = \alpha$ gelten soll

Es gilt
$$P_{\theta_1}(N=n) = \theta_1(1-\theta_1)^{n-1} \geq c \cdot \theta_0(1-\theta_0)^{n-1} = c P_{\theta_0}(N=n)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} \right)^{n-1} \geq c \underbrace{\frac{\theta_0}{\theta_1}}_{=2}$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)}_{=\frac{3}{2}} \geq \ln(2c)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2c)}{\ln(\frac{3}{2})} + 1 =: c^*$$

$\Rightarrow$ (*) besitzt äquiv. Darstellung

$$\varphi^*(n) = \begin{cases} 1 & n \geq c^* \\ 0 & n < c^* \end{cases}$$

Bestimmung der Konstanten c^* und γ^* :

$$E_{\theta_0}(\varphi^*(N)) = P_{\theta_0}(N \geq c^*) + \gamma^* P_{\theta_0}(N = c^*) \stackrel{!}{=} 0.05$$

Da $\gamma^* \in [0, 1]$, muss c^* so gewählt werden, dass

$$P_{\theta_0}(N \geq c^*) \leq 0.05 \text{ und } P_{\theta_0}(N \geq c^*) > 0.05$$

Man erhält

$$P_{\theta_0}(N > c^*) = 1 - \sum_{i=1}^{c^*} \left(\frac{1}{2}\right)^i \leq 0.05 \Leftrightarrow 2 - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{c^*+1}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 0.05$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{c^*} \leq 0.05$$

$$\Leftrightarrow c^* \geq \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.5)} \approx 4.32$$

Für $c^* = 5$ gilt

$$P_{\theta_0}(N \geq 5) = 1 - \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^5}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^4} = 0.0625 > 0.05 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow c^* = 5$$

Bestimme noch γ^* :

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \frac{(0.05 - P_{\theta_0}(N > 5))}{P_{\theta_0}(N = 5)} = \frac{0.05 - \left[1 - \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^i\right]}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} \\ &= \frac{\frac{1}{20} - \frac{1}{32}}{\frac{1}{32}} = \frac{8}{5} - 1 = 0.6 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es ergibt sich folgender Test

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1 & \text{falls } u \geq 5 \\ 0.6 & \text{falls } u = 5 \\ 0 & \text{falls } u < 5 \end{cases}$$

- b) Bei beobachtetem $N=5$ entscheidet man sich mit W'keit 0.6 für H_1 (randomisiert, also Entscheidung z.B. über Generieren einer Zufallszahl mit Verteilung $U_{\text{uni}}[0,1]$, d.h. Entscheidung für H_1 , falls $z \leq 0.6$)

c) Stärke des Tests:

$$\begin{aligned} E_{\theta_1}(\varphi(N)) &= P_{\theta_1}(N > 5) + 0.6 P_{\theta_1}(N = 5) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} + 0.6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^4 \\ &= 1 - \frac{1}{4} \sum_{i=0}^4 \left(\frac{3}{4}\right)^i + 0.6 \cdot 0.25 \cdot (0.75)^4 \\ &= 1 - \cancel{\frac{1}{4}} \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5}{\cancel{\frac{1}{4}}} + 0.6 \cdot 0.25 \cdot (0.75)^4 \\ &= (0.75)^4 (0.75 + 0.6 \cdot 0.25) \\ &\approx 0.2848 \end{aligned}$$