

Probeklausur

Einführung in die Stochastik

Soweit nicht explizit anders erwähnt, können Sie jeder Aufgabe einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zugrunde legen. Zufallsvariablen sind entweder diskrete reellwertige Zufallsvariablen oder reellwertige Zufallsvariablen mit einer Dichte.

Aufgabe 1

Es sei Ω ein Ereignisraum und eine Familie $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ von σ -Algebren auf Ω gegeben, wobei I eine nichtleere Indexmenge bezeichne. Zeigen Sie:

- $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ist eine σ -Algebra.
- Die Familie $\{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ -Algebra.

Aufgabe 2

In einer Stadt sind ein Drittel aller Tage eines Jahres verregnet. Die Zuverlässigkeit der Wettervorhersage hängt von der jeweiligen Wetterlage ab. Für die Tage, an denen es regnet, stimmt die Wettervorhersage in $2/3$ der Fälle, und für die Tage, an denen es nicht regnet, in $3/4$ der Fälle.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird für einen (uniform ausgewählten) Tag des Jahres Regen vorhergesagt?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es regnet, wenn Regen vorhergesagt ist?

Aufgabe 3

Sei X eine reelle Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und F die Verteilungsfunktion von X . Die Menge der Sprungstellen von F werde mit \mathcal{S} bezeichnet. Zeigen Sie:

- F besitzt höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

b) X ist genau dann diskret verteilt, wenn gilt:

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \{F(x) - F(x-)\} = 1.$$

Aufgabe 4

Seien X und Y unabhängige, Poi_μ - bzw. Poi_ν -verteilte Zufallsvariablen.

- Berechnen Sie jeweils die Erzeugendenfunktionen G_X bzw. G_Y und zeigen Sie mit Hilfe dieser Erzeugendenfunktionen, dass die Zufallsvariable $Z := X + Y$ $\text{Poi}_{\mu+\nu}$ -verteilt ist.
- Berechnen Sie über die Erzeugendenfunktion von Z den Erwartungswert sowie die Varianz von Z .

Aufgabe 5

Es seien X und Z_1, Z_2, \dots unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $X \sim \text{Uni}[0, 1]$ und Z_n besitze die Dichte

$$f_{Z_n}(x) = (n-1)\mathbb{1}_{[0, 1/n]}(x) + \mathbb{1}_{[1-1/n, 1]}(x).$$

Es sei ferner $Y_n := X + Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Zeigen Sie $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
- Zeigen Sie, dass Y_n nicht \mathbb{P} -fast sicher gegen X konvergiert, jedoch eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ existiert, s.d. $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_{n_k} = X$ \mathbb{P} -fast sicher.

Aufgabe 6

Es seien Y_1, Y_2, \dots unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_i = -1)$ ($0 < p < 1$).

- Zeigen Sie, dass (X_n) mit $X_n = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ eine Markov-Kette ist und geben Sie den Übergangsgraphen an.
- Berechnen Sie die stationäre Verteilung von (X_n) .

Aufgabe 7

In einer Urne befinden sich $W \leq 7$ weiße und 5 schwarze Kugeln, wobei $\vartheta = W \leq 7$ unbekannt ist. $n = 5$ mal werde ohne Zurücklegen gezogen. Sei x die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln. Man gebe für jedes $x = 0, \dots, 5$ ein Konfidenzintervall $C(x)$ zum Niveau $\alpha = 0.9$ an.

Hinweis Die Wahrscheinlichkeiten einer hypergeometrisch verteilten Zufallsvariablen X mit Parametern $\vartheta, \vartheta + 5, 5$ sind $\mathbb{P}_\vartheta(X = x) = \binom{\vartheta}{x} \binom{5}{5-x} / \binom{\vartheta+5}{5}$ (siehe Bsp. 1.6.10); die Werte sind hier aufgelistet:

$\vartheta \backslash x$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0.167	0.833	0	0	0	0
2	0.047	0.476	0.476	0	0	0
3	0.018	0.268	0.536	0.179	0	0
4	0.008	0.159	0.476	0.317	0.040	0
5	0.004	0.099	0.397	0.397	0.099	0.004
6	0.002	0.065	0.325	0.433	0.162	0.013
7	0.001	0.044	0.265	0.442	0.221	0.026

Aufgabe 8

Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)$.

- a) Zeigen Sie, dass die r -te Ordnungsstatistik $X_{r:n}$ die Verteilungsfunktion

$$F_r(x) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k}$$

besitzt.

- b) Zeigen Sie, dass $X_{r:n}$ die Dichte

$$f_r(x) = r \binom{n}{r} (F(x))^{r-1} (1 - F(x))^{n-r} f(x).$$

besitzt, falls F differenzierbar ist.

Ein (randomisierter) Neyman-Pearson-Test zum Niveau α für die Hypothesen

$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0, \quad H_1 : \vartheta = \vartheta_1$$

(also $\Theta_0 = \{\frac{1}{2}\}$ und $\Theta_1 = \{\frac{1}{4}\}$) sieht wie folgt aus:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & R(x) > c, \\ \gamma, & R(x) = c, \\ 0, & R(x) < c, \end{cases} \quad (1)$$

wobei $c \in \mathbb{R}, \gamma \in [0, 1]$ so zu bestimmen sind, dass $\mathbb{E}_{\vartheta_0}[X] = \alpha$ gilt. $R(x)$ ist hierbei der Quotient der Likelihoodfunktionen unter den gegebenen Hypothesen. Wie schon auf Übungsblatt 12 erläutert, gibt $\varphi(x)$ die Wahrscheinlichkeit an bei beobachtetem Wert x eine Entscheidung zu treffen. Falls $R(x) = c$, so wird mit Wahrscheinlichkeit γ entschieden. Die obige Definition ist eine Verallgemeinerung von Definition 2.4.1.

Aufgabe 9

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}_{\vartheta}(N = n) = \vartheta(1 - \vartheta)^{n-1}$.

- a) Bestimmen Sie den Neyman-Pearson-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ in der Form (1) für

$$H_0 : \vartheta = \frac{1}{2}, \quad H_1 : \vartheta = \frac{1}{4}.$$

- b) Wie entscheiden Sie sich bei beobachtetem $N = 5$?
c) Geben Sie die Stärke des Tests an.