Probeklausur
Einführung in die Stochastik

Soweit nicht explizit anders erwähnt, können Sie jeder Aufgabe einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zugrunde legen. Zufallsvariablen sind entweder diskrete reellwertige Zufallsvariablen oder reellwertige Zufallsvariablen mit einer Dichte.

Aufgabe 1

Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen (auf dem Bearbeitungsbogen) an, ob sie „wahr" oder „falsch" ist. Für jede *vollständig richtige Beantwortung aller Teile* 1) *bis* 4) einer der Aufgaben *a*) bis *d*) erhalten Sie jeweils drei Punkte. Es gibt keine Negativpunkte.

a) Es seien (A_n), $n \in \mathbb{N}$, und (B_n), $n \in \mathbb{N}$, Folgen von Ereignissen mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) < \infty$.

   1) Es folgt, dass $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.
   2) Es folgt, dass $\mathbb{P}(\liminf A_n) = 0$.
   3) Es folgt, dass $\mathbb{P}(\liminf B_n) = 1$.
   4) Es folgt, dass $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 0$.

b) Es seien $\mu_1, \mu_2 \in (0, \infty)$ und $X_1 \sim \mathrm{Poi}_{\mu_1}$ sowie $X_2 \sim \mathrm{Poi}_{\mu_2}$ unabhängige Poissonverteilte Zufallsvariablen. Weiterhin seien $\nu_1, \nu_2 \in (0, \infty)$ und $Y_1 \sim \mathrm{Exp}(\nu_1)$ sowie $Y_2 \sim \mathrm{Exp}(\nu_2)$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen.

   1) Es folgt, dass $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Poi}_{\mu_1+\mu_2}$.
   2) Es folgt, dass das Minimum $X_1 \wedge X_2$ $\mathrm{Poi}_{\mu_1+\mu_2}$-verteilt ist.
   3) Es folgt, dass $Y_1 + Y_2 \sim \mathrm{Exp}(\nu_1 + \nu_2)$.
   4) Es folgt, dass das Minimum $Y_1 \wedge Y_2$ $\mathrm{Exp}(\nu_1 + \nu_2)$-verteilt ist.

c) Es seien (X_n), $n \in \mathbb{N}$, und X reellwertige Zufallsvariablen.

1) Falls (X_n) für $n \to \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher gegen X konvergiert, so konvergiert (X_n) für $n \to \infty$ auch in Wahrscheinlichkeit gegen X.
2) Falls (X_n) für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergiert mit
$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \text{ für alle } \varepsilon > 0 \text{ und } n \in \mathbb{N},$$
so konvergiert (X_n) für $n \to \infty$ auch $\mathbb{P}$-fast sicher gegen X.
3) Falls (X_n) für $n \to \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher gegen X konvergiert und für alle X_n gilt, dass $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, so gilt auch $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.
4) Falls $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und falls (X_n) in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegen X konvergiert, so existiert eine $\mathbb{P}$-fast sicher konvergente Teilfolge (X_{n_k}), $k \in \mathbb{N}$, von (X_n), $n \in \mathbb{N}$, so dass (X_{n_k}) $\mathbb{P}$-fast sicher gegen X konvergiert für $k \to \infty$.

d) Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine u.i.v. Familie von Zufallsvariablen und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von identisch verteilten Zufallsvariablen. Weiterhin gelte $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[Y_1] = 0$, $\mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{E}[Y_1^2] = 1$ und $X_1, Y_1 \in \mathcal{L}^4$.

1) Es folgt, dass $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}$ in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable konvergiert.
2) Es folgt, dass $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)}{\sqrt{2n}}$ in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable konvergiert.
3) Es folgt, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|$ für $n \to \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher gegen 0 konvergiert.
4) Es folgt, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ für $n \to \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher gegen 0 konvergiert.

Lösung.

a) 4)

b) 1) und 4)

c) 1), 2) und 4)

d) 1) und 4)

Aufgabe 2

Es seien $p \in (0,1)$ sowie X, Y, Z unabhängige Ber_p-verteilte Zufallsvariablen. Weiterhin sei $U := (1-X)Y + XZ$.

a) Zeigen Sie, dass U Bernoulli-verteilt ist, und berechnen Sie den zugehörigen Parameter.

b) Geben Sie die Varianz von U an.

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[U^{17} - 1]$.

Lösung.

a) Da $X, Y, Z \in \{0, 1\}$ $\mathbb{P}$-f.s., gilt $U \in \{0, 1\}$ $\mathbb{P}$-f.s., und somit ist U Bernoulli-verteilt. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U = 0) &= \mathbb{P}((1 - X)Y = 0, XZ = 0) \\ &= \mathbb{P}(X = 1, Z = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = p(1 - p) + (1 - p)^2 = 1 - p.\end{aligned}$$

Also ist U auch Ber_p verteilt.

b) Da U Ber_p-verteilt ist, gilt nach Vorlesung $\mathrm{Var}(U) = p(1 - p)$.

c) Es gilt

$$\mathbb{E}\left[U^{17} - 1\right] = 0\mathbb{P}(U = 1) - 1\mathbb{P}(U = 0) = p - 1.$$

Aufgabe 3

Es sei $\mathcal{C} \subset 2^\Omega$, sodass für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ ein $A \in \sigma(\mathcal{C})$ existiert mit $\mathbb{1}_A(x) \neq \mathbb{1}_A(y)$.

a) Zeigen Sie, dass für jede Wahl von $x, y \in \Omega$ das Mengensystem

$$\mathcal{F}_{x,y} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_A(y)\}$$

eine σ-Algebra ist.

b) Zeigen Sie durch Widerspruch, dass für jede Wahl von $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ ein $A \in \mathcal{C}$ existiert mit $\mathbb{1}_A(x) \neq \mathbb{1}_A(y)$.

Lösung.

a) Es sei $x, y \in \Omega$.

- $\Omega \in \mathcal{F}_{x,y}$, da $\mathbb{1}_\Omega(x) = \mathbb{1}_\Omega(y) = 1$.
- Es sei $A \in \mathcal{F}_{x,y}$, dann gilt

$$\mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 - \mathbb{1}_A(y) = \mathbb{1}_{A^c}(y),$$

  und somit gilt $A^c \in \mathcal{F}_{x,y}$.
- Es seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_{x,y}$, dann

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i}(x) = \max_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_i}(x) = \max_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_i}(y) = \mathbb{1}_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i}(y).$$

b) Wir nehmen an, dass $x, y \in \Omega$ existieren mit $x \neq y$, sodass für alle $A \in \mathcal{C}$ $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_A(y)$. Nach der Definition von $\mathcal{F}_{x,y}$ gilt dann $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_{x,y}$ und $\mathcal{F}_{x,y} \subset \sigma(\mathcal{C})$.

Da $\mathcal{F}_{x,y}$ eine σ-Algebra ist, gilt somit $\mathcal{F}_{x,y} = \sigma(\mathcal{C})$ und das ist ein Widerspruch zur Annahme der Aufgabe.

Aufgabe 4

Es seien Multiple-Choice Aufgaben mit jeweils vier Aussagen, welche wir durch die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ beschreiben, gegeben. Jeder dieser vier Aussagen muss entsprechend ihrem Wahrheitsgehalt eines der Attribute „falsch“ ($\widehat{=}0$) und „wahr“ ($\widehat{=}1$) zugewiesen werden; dabei können sowohl mehrere Antworten als auch keine Antwort zutreffend sein. Somit können wir den Raum aller Antwortmöglichkeiten zu einer Multiple-Choice Aufgabe mit $\{0, 1\}^{\{1,2,3,4\}}$ identifizieren. Eine Multiple-Choice Aufgabe gilt als richtig beantwortet, falls jeder der vier Aussagen das richtige Attribut zugewiesen wurde. Mit dieser Konvention betrachten wir eine Aufgabe und eine Studierende sowie das Ereignis

$$A := \{\text{Die Studierende beantwortet die Aufgabe richtig}\}\,.$$

Wir nehmen an, dass die Studierende entweder die Lösung der Aufgabe kennt (und sie dann richtig beantwortet) oder zufällig uniform verteilt eine Antwortmöglichkeit auswählt. Wir definieren die Ereignisse

$$\begin{aligned} K &:= \{\text{Die Studierende kennt die Lösung der Aufgabe}\}\,, \\ K^c &= \{\text{Die Studierende wählt zufällig uniform eine der Antwortmöglichkeiten aus}\}\,. \end{aligned}$$

Es gilt somit $\mathbb{P}(A\,|\,K^c) = \frac{1}{2^4}$.

a) Es gelte $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung $\mathbb{P}(K)$.

b) Es seien nun vier Multiple-Choice Aufgaben gegeben. Bei einer dieser Aufgaben kennt die Studierende die Lösung der Aufgabe und bei den anderen wählt sie zufällig uniform verteilt (und unabhängig voneinander) eine Antwortmöglichkeit aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Studierende mindestens zwei Aufgaben richtig beantwortet (das Ergebnis ist in Form von Brüchen anzugeben).

Lösung.

a) Wir haben mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|K)\mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(A|K^c)\mathbb{P}(K^c) = 1 \cdot \mathbb{P}(K) + \frac{1}{2^4} \cdot (1 - \mathbb{P}(K))$$

und somit

$$\mathbb{P}(K) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^4}\right) = \frac{7}{15}.$$

b) Da sie eine Frage sicher beantworten kann, muss man berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, von den verbliebenen drei Aufgaben mindestens eine richtig zu beantworten. Die Gegenwahrscheinlichkeit hierzu ist

$$\left(\frac{15}{16}\right)^3,$$

also die WK, dass sie alle drei verbleibenden Aufgaben falsch beantwortet, und somit ist die gesuchte WK $1 - (\frac{15}{16})^3$.

Aufgabe 5

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Zufallsvariablen und X eine Zufallsvariable mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$ sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass die Verteilungsfunktion von X stetig ist.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N_{\varepsilon,x}$ gilt:

$$\mathbb{P}(X + a \leq x - \varepsilon) - \varepsilon \leq \mathbb{P}(X_n + a_n \leq x) \leq \mathbb{P}(X + a \leq x + \varepsilon) + \varepsilon.$$

b) Zeigen Sie

$$X_n + a_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X + a.$$

Lösung.

a) Es sei $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $N^1_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N^1_{\varepsilon,x}$. Dann gilt $a_n \leq a + \varepsilon$ und $a_n \geq a - \varepsilon$ für alle $n \geq N^1_{\varepsilon,x}$.
Also haben wir für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq N^1_{\varepsilon,x}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n + a_n \leq x) &= \mathbb{P}(X_n \leq x - a_n) \\ &\begin{cases} \leq \mathbb{P}(X_n \leq x - a + \varepsilon), \\ \geq \mathbb{P}(X_n \leq x - a - \varepsilon). \end{cases}\end{aligned}$$

Da (X_n) in Verteilung gegen X konvergiert und die Verteilungsfunktion von X stetig ist, existiert außerdem $N^2_{\varepsilon,x}$, sodass für alle $n \geq N^2_{\varepsilon,x}$

$\mathbb{P}(X_n \leq x - a + \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X \leq x - a + \varepsilon) + \varepsilon$ und $\mathbb{P}(X_n \leq x - a - \varepsilon) \geq \mathbb{P}(X \leq x - a - \varepsilon) - \varepsilon.$

Deswegen gilt für alle $N \geq N_{\varepsilon,x} := \max\{N^1_{\varepsilon,x}, N^2_{\varepsilon,x}\}$

$$\mathbb{P}(X + a \leq x - \varepsilon) - \varepsilon \leq \mathbb{P}(X_n + a_n \leq x) \leq \mathbb{P}(X + a \leq x + \varepsilon) + \varepsilon.$$

b) Da die Verteilungsfunktion von X in jedem Punkt stetig ist haben wir für alle $x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{P}(X + a \leq x - \varepsilon) - \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{P}(X + a \leq x)$ und $\mathbb{P}(X + a \leq x + \varepsilon) + \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{P}(X + a \leq x).$

Nach a) erhalten wir die Behauptung.

Aufgabe 6

Es sei $p \in [0,1]$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine zeithomogene Markovkette auf $S = \{1,2,3\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p/2 & p/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $p \in [0,1]$ ist die Markovkette irreduzibel? Für welche $p \in [0,1]$ ist sie aperiodisch?

b) Berechnen Sie alle stationären Verteilungen in Abhängigkeit von p. Wann ist diese eindeutig?

c) Zeigen Sie, dass wenn die Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist, $C \in (0,\infty)$ und $\varphi \in \mathcal{O}(\ln n/n)$ existieren, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und die unter diesen Voraussetzungen eindeutige stationäre Verteilung π gilt:

$$\sup_{x\in\{1,2,3\}} \|P^n(x,\cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}} \leq C\left(p + \varphi(n)\right)^n.$$

Lösung.

a) Irreduzibilität: Da man von den Zuständen 2 und 3 mit Wahrscheinlichkeit 1 zurück in den Zustand 1 wandert, ist die Markovkette genau dann irreduzibel, wenn man von Zustand 1 mit positiver Wahrscheinlichkeit in jeden dieser Zustände wandern kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn $p > 0$ gilt.

Aperiodizität: Die Kette ist aperiodisch genau dann, wenn $p \in (0,1)$ gilt: Wir haben dann $P(1,1) > 0$, $P^2(2,2) \geq P(2,1)P(1,2) > 0$ und $P^3(2,2) \geq P(2,1)P(1,1)P(1,2) > 0$ sowie analog für $P(3,3)$.

Für $p = 0$ ist der Zustand 1 absorbierend
und für $p = 1$ ist die Periode 2, denn $P^2(1,1) > 0$, sowie $P^1(1,1) = 0$ und wenn $P^{2n-1}(1,1) = 0$, dann

$$\begin{aligned} P^{2n+1}(1,1) &= P^{2n}(1,2)P(2,1) + P^{2n}(1,3)P(3,1) = \frac{1}{2}P^{2n}(1,2) + \frac{1}{2}P^{2n}(1,3) \\ &= \frac{1}{2}P^{2n-1}(1,1)P(1,2) + \frac{1}{2}P^{2n-1}(1,1)P(1,3) = 0. \end{aligned}$$

b) Wir müssen die Gleichung $\pi = \pi P$ lösen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (1-p)\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \\ \pi_2 &= \frac{p}{2}\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{p}{2}\pi_1. \end{aligned}$$

Da π eine Verteilung sein soll, folgt

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3,$$

und

$$1 = (1+p)\pi_1$$

folgt aus den vorherigen Gleichungen.

Wir erhalten also $\pi = \frac{1}{1+p}(1, p/2, p/2)$. π ist somit eindeutig bestimmt.

c) Die Spektrallücke ist definiert als $1 - \max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } P\}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\det(P - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-p-\lambda & p/2 & p/2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda^2((1-p) - \lambda) - \frac{p}{2} \cdot (-\lambda) + \lambda \cdot \frac{p}{2} \\
&= -\lambda(\lambda^2 - (1-p)\lambda - p) \\
&= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + p).
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösungen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -p$ und $\lambda_3 = 1$. Die Spektrallücke ist also $1 - p$.

Nach Theorem 1.16.39 gilt somit

$$\sup_{x \in \{1,2,3\}} \|P^n(x, \cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}} \leq C\,(1 - (1-p) + \varphi(n))^n = C\,(p + \varphi(n))^n$$

mit $\varphi \in \mathcal{O}(\ln n/n)$.

Aufgabe 7

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $X_i : (0,\infty)^n \to (0,\infty)$, sodass $X_i(x_1,\dots,x_n) = x_i$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$, und $((0,\infty)^n, \mathcal{B}((0,\infty)^n), (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in(0,\infty)})$ ein statistisches Modell, sodass $(X_1,\dots,X_n)$ unter $\mathbb{P}_\vartheta$ eine u.i.v. Familie von $\mathrm{Exp}(\frac{1}{\vartheta})$-verteilten Zufallsvariablen ist. Beachten Sie, dass in diesem Fall für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ und $\vartheta \in (0,\infty)$ schon $\mathrm{Var}_\vartheta(X_i) = \vartheta^2$ gilt.

a) Geben Sie für jedes $x \in (0,\infty)^n$ den Maximum-Likelihood Schätzer $\widehat{\upsilon}_{ML}(x) \in (0,\infty)$ für $\tau(\vartheta) = \vartheta$ an.

b) Ist $\widehat{\upsilon}_{ML}$ ein varianzminimierender, erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\vartheta) = \vartheta$?
Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $((0,\infty)^n, \mathcal{B}((0,\infty)^n), (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in(0,\infty)})$ ein reguläres statistisches Modell ist, und dass $\widehat{\upsilon}_{ML}$ ein erwartungstreuer, regulärer Schätzer für $\tau(\vartheta) = \vartheta$ ist.

Lösung.

a) Es sei $x \in (0,\infty)^n$ und

$$\rho(x,\vartheta) := \prod_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{x_i}{\vartheta}} \quad \text{für alle } \vartheta \in (0,\infty).$$

Der Maximum-Likelihood Schätzer $\widehat{\vartheta}_{ML}(x)$ ist definiert via

$$\rho(x, \widehat{\vartheta}_{ML}(x)) = \max_{\vartheta\in(0,\infty)} \rho(x,\vartheta).$$

Für alle $\vartheta \in (0,\infty)$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log(\rho(x,\vartheta))}{\partial\vartheta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(-\log(\vartheta) - \frac{x_i}{\vartheta}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\frac{x_i}{\vartheta^2} - \frac{1}{\vartheta}\Big) \\ &= \frac{n}{\vartheta^2}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) - \vartheta\right)\end{aligned}$$

und somit ist genau dann $\rho(x,\vartheta)$ maximal,

$$\vartheta = \widehat{\vartheta}_{ML}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

b) Wir haben durch das Lemma von Bienaymé

$$\mathrm{Var}_\vartheta\left(\hat{\vartheta}_{ML}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}_\vartheta(X_i) = \frac{\vartheta^2}{n}.$$

Außerdem gilt

$$I(\vartheta) = \mathrm{Var}_\vartheta\left[\frac{\partial \log(\rho(x,\vartheta))}{\partial\vartheta}\right] = \mathrm{Var}_\vartheta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\vartheta^2} - \frac{1}{\vartheta}\right) = \frac{1}{\vartheta^4}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}_\vartheta\left(X_i\right) = \frac{n}{\vartheta^2},$$

und somit

$$\mathrm{Var}_\vartheta\left(\hat{\vartheta}_{ML}\right) = \frac{\tau'(\vartheta)^2}{I(\vartheta)} \text{ für alle } \vartheta \in (0,\infty).$$

Nach der Cramér-Rao Ungleichung ist daher $\hat{\vartheta}_{ML}$ varianzminimierend.