Übungsblatt 9: Lösungen

Alle Zufallsvariablen sind auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert.

Aufgabe 9.1. (mündliche Aufgabe)

(a) Seien $p, b \in \mathbb{R}_+$. Eine reelle Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}_+$ heißt Gamma-verteilt mit den Parametern p und b, wenn Y verteilt ist mit Dichte

$$f_Y(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Dabei ist $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$ die Gamma-Funktion. Seien weiter $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und Exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Man kann zeigen, dass $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{\lambda}$, $Var(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$ gilt $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

(i) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die Summe $X_1 + \cdots + X_n$ Gamma-verteilt ist mit den Parametern n und λ.
Hinweis: Es gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$.

(ii) Sei Y Gamma-verteilt mit den Parametern n und λ. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von Y.

(iii) Zeigen Sie, dass für alle n gilt

$$P\left\{\sum_{j=1}^n X_j \geq \sqrt{\tfrac{n}{\lambda}}\left(\tfrac{2^{n/2}}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\tfrac{n}{\lambda}}\right)\right\} \leq 2^{-n}.$$

(b) Seien $X_1, ..., X_n$ u.i.v. Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $p \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass für $z > 0$ und $Y = e^{z\sum_{i=1}^n X_i}$ gilt

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq x\right) \leq e^{-zx}\mathbb{E}[Y].$$

Beweis. (a) (i) Wir schreiben $f_n(x) = (\lambda^n/\Gamma(n))x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Dann wollen wir für jedes n die Aussage

$$A(n): \qquad S_n := X_1 + \cdots + X_n \text{ ist verteilt mit Dichte } f_n \tag{1}$$

zeigen. Für $n = 1$ gilt $S_1 = X_1$ und da X_1 nach Voraussetzung Exponentialverteilt ist mit Parameter λ, ist X_1 verteilt mit Dichte

$$\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \frac{\lambda^1}{\Gamma(1)} x^{1-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = f_1(x).$$

$A(1)$ ist also erfüllt. Gelte nun $A(n)$. Da S_n nach $A(n)$ verteilt ist mit Dichte f_n, hat $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ nach der Vorlesung die Dichte $f_n * f_1$. Für $z < 0$ folgt direkt $f_n * f_1(z) = 0$. Für $z \geq 0$ folgt wie in Beispiel 1.9.28

$$\begin{aligned} f_n * f_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) f_1(z-x) dx &= \int_0^z \tfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda z + \lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{n-1} dx = \frac{\lambda^{n+1}}{n\Gamma(n)} z^n e^{-\lambda z} = f_{n+1}(z), \end{aligned}$$

da nach Hinweis gilt $n\Gamma(n) = n(n-1)! = n! = \Gamma(n+1)$. Damit gilt $A(n+1)$.

(ii) Der Erwartungswert und die Varianz hängen nur von der Verteilung einer Zufallsvariablen ab. Nach (a) haben S_n und Y diesselbe Verteilung. Damit

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n X_j\right] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_j] = n\mathbb{E}[X_1] = \frac{n}{\lambda},$$

da die X_i alle identisch Exponentialverteilt sind mit Parameter λ. Mit der Gleichheit von Bienaymé, und der obigen Bemerkung, folgt

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left[\sum_{j=1}^n X_j\right] = \sum_{j=1}^n \mathrm{Var}(X_j) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

(iii) Wir haben in der (b) bereits Erwartungswert und Varianz von S_n ausgerechnet. Damit folgt

$$\begin{aligned} P\Big\{S_n \geq \sqrt{\tfrac{n}{\lambda}}\left(\tfrac{2^{n/2}}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\tfrac{n}{\lambda}}\right)\Big\} &= P\left\{S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq \sqrt{\tfrac{n}{\lambda}}\tfrac{2^{n/2}}{\sqrt{\lambda}}\right\} \\ &\leq P\left\{S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq \sqrt{\tfrac{n}{\lambda}}\tfrac{2^{n/2}}{\sqrt{\lambda}}\right\} \\ &\quad + P\left\{-(S_n - \mathbb{E}[S_n]) \leq \sqrt{\tfrac{n}{\lambda}}\tfrac{2^{n/2}}{\sqrt{\lambda}}\right\} \\ &= P\Big\{|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq \sqrt{\tfrac{n}{\lambda}}\tfrac{2^{n/2}}{\sqrt{\lambda}}\Big\} \\ &\overset{(*)}{\leq} \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{\left(\sqrt{\tfrac{n}{\lambda}}\tfrac{2^{n/2}}{\sqrt{\lambda}}\right)^2} = \frac{\tfrac{n}{\lambda^2}}{\left(\sqrt{\tfrac{n}{\lambda}}\tfrac{2^{n/2}}{\sqrt{\lambda}}\right)^2} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Dabei gilt $(*)$ nach der Chebyshev-Ungleichung.

(b) Die Abbildung $x \mapsto e^{zx}$ ist streng monoton wachsend, also gilt

$$\{\sum_{i=1}^n X_i \geq x\} = \{e^{z\sum_{i=1}^n X_i} \geq e^{zx}\}$$

und damit

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq x\right) = P\left(e^{z\sum_{i=1}^n X_i} \geq e^{zx}\right) = P(Y \geq e^{zx}).$$

Nach der Markov-Ungleichung ist

$$P(Y \geq e^{zx}) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{e^{zx}} = e^{-zx}\mathbb{E}[Y].$$

Damit folgt $P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq x\right) \leq e^{-zx}\mathbb{E}[Y]$.

□

Aufgabe 9.2. (mündliche Aufgabe) Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine u.i.v. Familie von $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsvariablen, sodass
$X_1 \notin \mathcal{L}^1$, und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable X die folgende Gleichung gilt

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X > k\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt: $X_n > n$ für unendlich viele n.

(c) Zeigen Sie $\mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} \text{ besitzt einen Grenzwert}\}\Big) = 0$.

Beweis. (a) Da X nur Werte in $\mathbb{N}_0$, gilt $\mathbb{E}[X] = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N n\mathbb{P}(X = n)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = n) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(N \geq X \geq k) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(N \geq X > k),
\end{aligned}$$

wobei $(*)$ ein Umschreiben der Doppelsumme ist. Mit $N \to \infty$ folgt die Behauptung.

(b) Da $X_1 \notin \mathcal{L}^1$, gilt nach (a)

$$\mathbb{E}[X_1] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 > n) = \infty.$$

Außerdem $\mathbb{P}(X_1 > n) = \mathbb{P}(X_n > n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weil $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u.i.v. ist, und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > n) = \infty.$$

Da die $\{X_n > n\}$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig sind, erhalten wir gemäß des Borel-Cantelli Lemmas

$$\mathbb{P}(X_n > n \text{ für unendlich viele } n) = \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{X_n > n\}\right) = 1,$$

(c) Es sei ω, sodass $\frac{S_n(\omega)}{n}$ einen Grenzwert hat. Dann gilt für alle $n \geq 2$

$$\frac{X_n(\omega)}{n} = \frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{S_{n-1}(\omega)}{n} = \frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{S_{n-1}(\omega)}{n-1} \times \frac{n-1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

und somit $X_n(\omega) > n$ für endlich viele n. Daher erhalten wir nach a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \text{ hat einen Grenzwert }\right) &\leq \mathbb{P}(X_n > n \text{ nur für endlich viele } n)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X_n > n \text{ für unendlich viele } n) = 0.\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 9.3. (schriftliche Aufgabe: 14 Punkte)

(a) Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \ \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n\}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \ \omega \in A_n \text{ für alle bis auf endlich viele } n\}$$

(3 Punkte)

(b) Es sei nun $\Omega = \{0,1\}$, $A_n = \{1\}$, wenn n gerade ist, und $A_n = \{0\}$, wenn n ungerade ist. Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} A_n$ und $\liminf_{n\to\infty} A_n$.
(3 Punkte)

(c) Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega^{\mathbb{N}}$, sodass $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

(2 Punkte)

(d) Wir beginnen einen „Würfelwurf Prozess“ mit einem sechsseitigen, fairen Würfel. Nachdem man jeweils einen Würfel geworfen hat, wirft man anschließend einen anderen fairen Würfel, der jedoch sechs Seiten mehr besitzt. Es sei daher $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen, sodass X_n $\mathrm{Uni}_{\{1,\ldots,6n\}}$-verteilt ist für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$\mathrm{Uni}_{\{1,\ldots,p\}} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \delta_k \text{ für alle } p \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, unendlich oft eine 1 zu würfeln, das heißt $\mathbb{P}(X_n = 1 \text{ für unendliche viele } n)$.
(3 Punkte)

(e) Nun betrachten wir einen anderen „Würfelwurf Prozess“, der auch mit einem sechsseitigen, fairen Würfel beginnt. Nachdem man jeweils einen Würfel geworfen hat, wirft man anschließend einen anderen fairen Würfel, der jedoch doppelt so viele Seiten wie der letzte Würfel besitzt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, unendlich oft eine 1 zu würfeln.
(3 Punkte)

Beweis. (a) (i) “$\subset$“ Es sei $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$. Wir nehmen an, dass $\omega \in A_n$ nur für endlich viele n. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\omega \notin A_n$ für alle $n \geq k$. Aber

$$\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n \subset \bigcup_{n\geq k} A_n$$

und das ist ein Widerspruch.
"$\supset$" Es sei $\omega \in \Omega$, sodass $\omega \in A_n$ für unendlich viele n. Dann existiert für $p \in \mathbb{N}$ ein $n \geq p$, sodass $\omega \in A_n$, das heißt

$$\omega \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n.$$

(ii) "$\subset$" Es sei

$$\omega \in \liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} A_n,$$

dann existiert p, sodass $\omega \in \bigcap_{n \geq p} A_n$, das heißt $\omega \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf höchsten p viele n.
"$\supset$" Es sei $\omega \in \Omega$, sodass $\omega \in A_n$ für alle bis auf endliche viele n. Dann existiert $p \in \mathbb{N}$, sodass $\omega \notin A_n$, nur wenn $n < p$, das heißt

$$\omega \in \bigcap_{n \geq p} A_n \subset \liminf_{n \to \infty} A_n.$$

Man kann auch die Gleichung für die lim inf mit Hilfe des Komplements Beweisen. Denn nach De Morgan ergibt sich

$$\left(\limsup_{n \to \infty} A_n^c\right)^c = \left(\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n^c\right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_n = \liminf_{n \to \infty} A_n.$$

und somit nach der ersten Gleichung für die lim sup

$$\begin{aligned} \liminf_{n \to \infty} A_n &= \{\omega \in \Omega : \ \omega \in A_n^c \text{ für unendlich viele } n\}^c \\ &= \{\omega \in \Omega : \ \omega \in A_n^c \text{ für endlich viele } n\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \ \omega \in A_n \text{ für alle bis auf endlich viele } n\}. \end{aligned}$$

(b) Durch (a) haben wir

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \{\omega \in \{0,1\} : \ \omega \in A_n \text{ für unendliche mal } n\} = \{0,1\},$$

da $0 \in A_n$ für unendlich viele (ungerade) n und $1 \in A_n$ für unendlich viele (gerade) n. ähnlich haben wir

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \{\omega \in \{0,1\} : \ \omega \in A_n \text{ für alle bis auf endlich viele } n\} = \emptyset.$$

Man kann auch das direkt durch der Definition von lim sup und lim inf beweisen. Nämlich haben wir für alle $p \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n \geq p} A_n = \{0,1\} \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{n \geq p} A_n = \emptyset,$$

da es $n \geq p$ existiert, sodass $A_n = \{1\}$ und $A_{n+1} = \{0\}$, und somit

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n = \{0,1\} \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} A_n = \emptyset.$$

(c) Da $A_p \subset A_n$ für alle $n \geq p$, gilt für alle $p \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n\geq p} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{n\geq p} A_n = A_p$$

und somit gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ und } \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq p} A_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p.$$

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathrm{Uni}_{\{1,\dots,6n\}}(\{1\}) = \frac{1}{6n}$$

und somit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{6n} = \frac{1}{6}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty.$$

Da die $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig sind, gilt durch a) und des Borel-Cantelli Lemmas

$$\mathbb{P}(X_n = 1 \text{ für unendliche viele n}) = \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{X_n = 1\}\right) = 1.$$

(e) Nun betrachten wir $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen, sodass Y_n $Uni_{\{1,\dots,6\times 2^{n-1}\}}$-verteilt ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann stellt Y_n das Ergebnis des n-ten Würfelwurfes dar für alle $n \in \mathbb{N}$, weil $6\times 2^{1-1} = 6$ und $2\times 6\times 2^{n-1} = 6\times 2^n$. Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(Y_n = 1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{6\times 2^{n-1}} = \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Wir benutzen nochmal a) und das Borel-Cantelli-Lemma

$$\mathbb{P}(Y_n = 1 \text{ für unendliche viele n}) = \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{Y_n = 1\}\right) = 0.$$

und somit würfelt man unendlich oft eine 1 mit Wahrscheinlichkeit 0.

$\square$

Aufgabe 9.4. (schriftliche Aufgabe: 6 Punkte)

(a) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine u.i.v. Familie von Zufallsvariablen, sodass $X_1 \in \mathcal{L}^4$,

$$\overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{und} \qquad V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{S}_n)^2.$$

Zeigen Sie

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2 - \left(\overline{S}_n - \mathbb{E}[X_1]\right)^2.$$

(3 Punkte)

(b) Es sei $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in a). Zeigen Sie $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathrm{Var}(X_1)$.

(3 Punkte)

Beweis. (a) Da $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u.i.v. ist, gilt für alle $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned}(X_i - \overline{S}_n)^2 &= (X_i - \mathbb{E}[X_i] + \mathbb{E}[X_1] - \overline{S}_n)^2 \\ &= (X_i - \mathbb{E}[X_i])^2 + (\overline{S}_n - \mathbb{E}[X_1])^2 - 2(X_i - \mathbb{E}[X_i])(\overline{S}_n - \mathbb{E}[X_1]).\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}V_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2\right] + (\overline{S}_n - \mathbb{E}[X_1])^2 - 2(\overline{S}_n - \mathbb{E}[X_1])\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i]) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2 + (\overline{S}_n - \mathbb{E}[X_1])^2 - 2(\overline{S}_n - \mathbb{E}[X_1])^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2\right] - (\overline{S}_n - \mathbb{E}[X_1])^2\end{aligned}$$

(b) Da $\left((X_i - \mathbb{E}[X_i])^2\right)_{i\in\mathbb{N}}$ eine u.i.v. Familie von Zufallsvariablen, die in $\mathcal{L}^2$ sind, ist, gilt gemäß des schwachen Gesetzes der großen Zahlen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2] = \mathrm{Var}(X_1).$$

Da $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine u.i.v. Familie von Zufallsvariablen, die in $\mathcal{L}^2$ sind, ist, gilt gemäß des schwachen Gesetzes der großen Zahlen

$$\overline{S}_n - \mathbb{E}[X_1] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Nach (a) und 8.1.d) gilt somit

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2 - (\overline{S}_n - \mathbb{E}[X_1])^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2] = \mathrm{Var}(X_1).$$

□