Übungsblatt 8: Lösungen

Aufgabe 8.1. (mündliche Aufgabe)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Zufallsvariablen definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Es gelte $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ und $X \equiv 0$. Zeigen Sie

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \text{aber} \quad X_n \not\xrightarrow{\mathcal{L}^1} X.$$

(b) Es gelte $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$ und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Zeigen Sie, dass X_n in $\mathcal{L}^1$ konvergiert, aber nicht in $\mathcal{L}^2$.

(c) Angenommen, es existieren X und Y, welche ebenfalls auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind, sodass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(X = Y) = 1.$$

(d) Seien $X, Y, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zufallsvariablen, welche auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind mit $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Zeigen Sie, dass $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$.

(e) Seien $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zufallsvariablen, welche auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind mit $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \to a$. Zeigen Sie, dass $a_n X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX$

Beweis. (a) Es sei $\varepsilon \in (0,1)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Wegen $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon_1) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon_2)$ für $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ folgt die Behauptung auch für $\varepsilon \geq 1$ und damit für alle $\varepsilon > 0$.

Für die zweite Behauptung haben wir

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|\right] = \mathbb{E}\left[|X_n|\right] = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \not\to 0.$$

(b) Wir haben

$$\mathbb{E}\left[|X_n|\right] = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0,$$

also $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} 0$.

Wenn eine Zufallsvariable Y existiert, sodass $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} Y$, dann gilt nach der Hölder-Ungleichung

$$\mathbb{E}\left[|Y|\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_n - Y|\right] + \mathbb{E}\left[|X_n|\right] \leq \mathbb{E}\left[(X_n - Y)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}[|X_n|] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

da $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} Y$, und $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} 0$. Nach Aufgabe 7.1.a) gilt daher

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(|Y|=0) = 1.$$

Aber

$$\mathbb{E}\left[(X_n - Y)^2\right] = \mathbb{E}\left[X_n^2\right] = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 \not\to 0.$$

und das ist ein Widerspurch.

(c) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|X-Y| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(|X - X_n - (Y - X_n)| \geq \varepsilon\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(|X - X_n| + |Y - X_n| \geq \varepsilon\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\left\{|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|X_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0 \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Da die linke Seite nicht von n abhängt, haben wir $\mathbb{P}\left(|X-Y| \geq \varepsilon\right) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt $\mathbb{P}(|X-Y| > 0) = 0$ und damit die Behauptung.

(d) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|(X_n + Y_n) - (X+Y)| \geq \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\{|X_n - X| \geq \varepsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \varepsilon/2\}\right) \\
&\leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon/2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|a_n X_n - aX| \geq \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|(a_n X_n - a_n X) + (a_n X - aX)| \geq \varepsilon) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\big||a_n| \cdot |X_n - X| + |a_n - a| \cdot |X|\big| \geq \varepsilon\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2|a_n|}\right) + \mathbb{P}\left(|a_n - a| \cdot |X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 8.2. (mündliche Aufgabe) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei X_n die Anzahl der Köpfe, wenn eine faire Münze n mal geworfen wird.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$$

gilt, und $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{2}$.

(b) Finden Sie ein n, sodass der Durchschnitt der Anzahl der Köpfe $\frac{X_n}{n}$ streng zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ mit Wahrscheinlichkeit größer als 0.9 ist.

(c) Sie werfen die Münze 8000 mal und erhalten 2000 Köpfe. Denken Sie, dass die Münze wirklich fair ist?

Beweis. (a) Durch der Linearität des Integrales haben wir

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i - X_{i-1}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

da $X_i - X_{i-1}$ $\mathrm{Ber}_{\frac{1}{2}}$-verteilt für alle $i \in \mathbb{N}$ ist. Wir benutzen die Tschebyscheffsche Ungleichung

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\frac{X_n}{n})}{\varepsilon^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{Var}(X_i - X_{i-1})}{n^2\varepsilon^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

da $(X_i - X_{i-1})_{i\in\mathbb{N}}$ eine u.i.v. Familie von Zufallsvariablen ist mit Varianz $\frac{1}{4}$. Deswegen gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

und somit $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{2}$.

(b) Wir wollen ein n finden, sodass

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{4} < \frac{X_n}{n} < \frac{3}{4}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}\right) \geq 0.9.$$

gilt. Nach a) gilt

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}\right) \geq 1 - \frac{4}{n}$$

und daher $n = 40$ passt.

(c) Da $\frac{2000}{8000} = \frac{1}{4}$, ist die Wahrscheinlichkeit ein so extremes Ereignis zu haben

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_{8000}}{8000} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}\right) \leq \frac{1}{2000}.$$

Wir schließen daraus, dass es unwahrscheinlich ist, dass eine faire Münze 2000 mal Kopf unter 8000 Würfen zeigt.

□

Aufgabe 8.3. (schriftliche Aufgabe: 13 Punkte)

(a) Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen, wobei X_n die Dichte $f_n(x) = 2xn^2e^{-x^2n^2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ besitze. Zeigen Sie

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

(3 Punkte)

(b) Sei Z eine reelle Zufallsvariable. $Z_n := Z + X_n$, wobei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen ist mit

$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{n}, \quad Var(X_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

mit $\sigma > 0$. Zeigen Sie, dass $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$. (3 Punkte)

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in (0,1)$ sei $(X_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ eine u.i.v. Familie von $\mathrm{Ber}_{\frac{\lambda}{n}}$-verteilten Zufallsvariablen. Ferner sei $Y^{(n)} := \inf\{i \in \mathbb{N} : X_i^{(n)} = 1\}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 4.2, dass

$$\frac{1}{n}Y^{(n)} \Longrightarrow X \sim \mathrm{Exp}(\lambda).$$

(3 Punkte)

(d) Seien $X_1, X_2, ..$ unabhängig und $X_n \sim Uni((0,1))$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $Y_n := \underset{1\le i\le n}{max} X_i$. Zeigen Sie, dass

$$n(1 - Y_n) \Longrightarrow X \sim \mathrm{Exp}(1).$$

(4 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie für $\varepsilon \in (0,1)$: $\mathbb{P}(|Y_n - 1| \geq \varepsilon)$.

Beweis. (a) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) &= 1 - \mathbb{P}(X_n \in [0,\varepsilon)) = 1 - \int_0^\varepsilon 2tn^2e^{-t^2n^2}\mathrm{d}t \\ &= 1 + \left[e^{-t^2n^2}\right]_0^\varepsilon = e^{-\varepsilon^2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

(b) Mithilfe der Dreiecksungleichung gilt

$$|X_n| \leq |X_n - \mathbb{E}[X_n]| + \frac{1}{n}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}\left(|X_n - \mathbb{E}[X_n]| + \frac{1}{n} \geq \varepsilon\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(|X_n - \mathbb{E}[X_n]| \geq \varepsilon - \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \frac{Var(X_n)}{\left(\varepsilon - \frac{1}{n}\right)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n\left(\varepsilon - \frac{1}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

wobei in der letzten Abschätzung die Chebyshevs Ungleichung verwendet wurde.

(c) Nach Aufgabe 4.2 a) ist $Y^{(n)} \sim \mathrm{Geo}_{\frac{\lambda}{n}}$. Damit haben wir für $x > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}Y^{(n)} \leq x\right) &= 1 - \mathbb{P}(Y^{(n)} > nx) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y^{(n)} > \lfloor nx \rfloor) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} = 1 - \left((1 - \frac{\lambda}{n})^n\right)^{\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \left(e^{-\lambda}\right)^x = 1 - e^{-x\lambda},\end{aligned}$$

da $\frac{xn-1}{n} = x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$, und nach Definition $\mathbb{P}(\frac{1}{n}Y^{(n)} \leq x) = 0$ für $x \leq 0$.

(d) Es sei $\varepsilon \in (0,1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(Y_n \leq 1 - \varepsilon) \quad (1) \\ &= \mathbb{P}(\{X_1 \leq 1 - \varepsilon\}, ..., \{X_n \leq 1 - \varepsilon\}) = (1 - \varepsilon)^n\end{aligned}$$

Setze nun in der $\varepsilon = \frac{t}{n}$ für $t > 0$ und n groß genug. Wir erhalten nach Umformung

$$\mathbb{P}(n(1 - Y_n) \leq t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-t} \quad (2)$$

somit konvergiert $n(1-Y_n)$ in Verteilung gegen eine Zufallsvariable, welche eine Exponentialverteilung mit Parameter 1 aufweist. (Für $t \leq 0$ sieht man direkt, dass die Wahrscheinlichkeit in (2) 0 ist.)

□

Aufgabe 8.4. (schriftliche Aufgabe: 7 Punkte)
Wir betrachten zwei unabhängige Laplace Würfel. Die Verteilung der Summe der Augenzahlen ist uns bekannt. Wir möchten nun die Zahlen auf den Würfeln durch eine

andere Kombination aus Zahlen in $\mathbb{N}$ ersetzen, sodass die Summe der Augenzahlen weiterhin die gleiche Verteilung aufweist. Finden Sie eine solche Kombination. (Die beiden neuen Würfel müssen nicht gleich sein.)

Hinweis: Sei X_1 die Zufallsvariable, welche die Augenzahl des ersten Würfels wiedergibt und X_2 entsprechend die Zufallsvariable, welche die Augenzahl des zweiten Würfels anzeigt. Sei $Y := X_1 + X_2$. Wie sehen die momentenerzeugenden Funktionen G_{X_1} und G_Y für X_1 bzw. Y aus. Welcher Zusammenhang besteht zwischen G_{X_1}, G_{X_2} und G_Y? Betrachten Sie zudem die Faktorisierungen der momentenerzeugenden Funktionen.

Beweis. Die momentenerzeugenden Funktion von X_1 lautet:

$$G_{X_1}(s) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} s^i = \frac{1}{6} \frac{s - s^7}{1 - s}$$

wobei die Gleichheit für$s \neq 1$ gilt. G_{X_1} kann mithilfe einer Faktorisierung dargestellt werden als:

$$G_{X_1}(s) = \frac{1}{6} \frac{s(1-s)(1+s)(1+s^2+s^4)}{1-s} = \frac{1}{6} s(1+s)(1+s+s^2)(1-s+s^2).$$

Uns ist bekannt, dass $G_{X_1} \cdot G_{X_2} = G_Y$, da X_1 und X_2 unabhängig voneinander sind. Wir wollen nun zwei momentenerzeugenden Funktionen finden f und g finden, sodass that $f \cdot g = G_{X_1}^2$ gilt. Zu beachten ist dabei, dass die Zufallsvariablen maximal 6 Werte in $\{1, \ldots, 12\}$ annehmen. Wir wählen

$$f(s) = \frac{1}{6} s(1+s)(1+s+s^2) = \frac{1}{6} \left(s + 2s^2 + 2s^3 + s^4 \right)$$

und

$$g(s) = \frac{1}{6} s(1+s)(1+s+s^2)(1-s+s^2)^2 = \frac{1}{6} \left(s + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^8 \right) ,$$

welche die geforderte Gleichung erfüllen. Man erkennt, dass f die erzeugenden Funktion einer Zufallsvariable Z_1 ist, welche die nachstehende Verteilung besitzt.

$$\mathbb{P}(Z_1 = 1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(Z_1 = 2) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(Z_1 = 3) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(Z_1 = 4) = \frac{1}{6},$$

Dies lässt auf eine Würfel schließen, welcher je einmal die Zahl 1 und 4 aufweist und je zweimal die Zahl 2 und 3. Die momentenerzeugenden Funktion g gehört zu einer Zufallsvariablen Z_2, welcher die Zahlen 1,3,4,5,6 und 8 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zeigt. $\square$