Übungsblatt 7: Lösungen

Alle Zufallsvariablen auf diesem Übungsblatt sind auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert und diejenigen, deren Erwartungswert berechnet wird, können als diskret oder eine Dichte besitzend angenommen werden.

Aufgabe 7.1. (mündliche Aufgabe)

(a) Es sei $X \in \mathcal{L}^1$ mit $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ und $\mathbb{E}[X] = 0$. Zeigen Sie $\mathbb{P}(X \in [0, \varepsilon]) = 1$ für alle $\varepsilon > 0$ und damit $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

(b) Es sei $X \in \mathcal{L}^2$ mit $\mathrm{Var}(X) = 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = 1$.

(c) Sei X eine reelle Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|X|] = 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ gilt.

Beweis. (a) Es sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\mathbb{P}(X \geq 0)$ kann man leicht zeigen, dass X dieselbe Verteilung wie $X \mathbb{1}_{\{X \geq 0\}} = X^+$ hat, denn für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A) &= \mathbb{P}(X \in A, X \geq 0) + \underbrace{\mathbb{P}(X \in A, X < 0)}_{\leq \mathbb{P}(X<0)=0} \\
&= \mathbb{P}(X^+ \in A) - \underbrace{\mathbb{P}(X^+ \in A, X < 0)}_{\leq \mathbb{P}(X<0)=0} \\
&= \mathbb{P}(X^+ \in A).
\end{aligned}$$

Damit gilt auch

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in [0, \varepsilon]) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X \in [0,\varepsilon]\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X \geq 0\}} - \mathbb{1}_{\{X > \varepsilon\}}\right] \\
&\overset{\text{Lin.}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X \geq 0\}}\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X > \varepsilon\}}\right] = \mathbb{P}\left(X \geq 0\right) - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X > \varepsilon\}}\right] \\
&= 1 - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\frac{X}{\varepsilon} > 1\}}\right] \\
&\overset{(*)}{\geq} 1 - \mathbb{E}\left[\frac{X}{\varepsilon}\mathbb{1}_{\{\frac{X}{\varepsilon} > 1\}}\right] = 1 - \mathbb{E}\left[\frac{X^+}{\varepsilon}\mathbb{1}_{\{\frac{X^+}{\varepsilon} > 1\}}\right] \\
&\overset{(**)}{\geq} 1 - \mathbb{E}\left[\frac{X^+}{\varepsilon}\right] \overset{\text{Lin.}}{=} 1 - \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[X^+\right] = 1 - \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[X\right] \\
&= 1 - 0 = 1,
\end{aligned}$$

wobei wir in (*) benutzt haben, dass $\frac{x}{\varepsilon}\mathbb{1}_{\{\frac{x}{\varepsilon} > 1\}} \geq \mathbb{1}_{\{\frac{x}{\varepsilon} > 1\}}$ gilt, sowie in (**), dass $\frac{x^+}{\varepsilon}\mathbb{1}_{\{\frac{x^+}{\varepsilon} > 1\}} \leq \frac{x^+}{\varepsilon}$ gilt. Die zweite Behauptung folgt dann mit Stetigkeit von oben, d.h.

$$P(X = 0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}(X \in [0, \varepsilon]) = 1.$$

(b) Die Zufallsvariable $Y := (X - \mathbb{E}[X])^2$ ist nicht-negativ, also $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1$ und wegen $X \in \mathcal{L}^2$ gilt $Y \in \mathcal{L}^1$. Ferner gilt $\mathbb{E}[Y] = \mathrm{Var}(X) = 0$. Nach a) haben wir demnach

$$\mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}[X])^2 = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 1.$$

(c) Die Aussage folgt mit (a): Es gilt $\mathbb{E}[|X|] = 0$ und $\mathbb{P}(|X| \geq 0) = 1$. Wir erhalten nun $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(|X| = 0) = 1$.

□

Aufgabe 7.2. (mündliche Aufgabe) Es seien $b > 0$ und $X \in \mathcal{L}^2$ mit $\mathbb{P}(|X| \leq b) = 1$.

(a) Zeigen Sie
$$\mathrm{Var}(X) \leq b^2. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 7.1.a), dass Gleichheit in (1) genau dann vorliegt, wenn
$$\mathbb{P}(X = -b) = \mathbb{P}(X = b) = \frac{1}{2}$$
gilt.

Beweis. (a) Wir haben

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2 \mathbb{1}_{\{|X| \leq b\}}\right] \leq b^2 \mathbb{P}(|X| \leq b) = b^2.\end{aligned}$$

(b) "$\Leftarrow$": Falls $\mathbb{P}(X = -b) = \mathbb{P}(X = b) = \frac{1}{2}$ gilt, so haben wir $\mathbb{E}[X] = -b\mathbb{P}(X = -b) + b\mathbb{P}(X = b) = 0$ und $\mathbb{E}[X^2] = (-b)^2\mathbb{P}(X = -b) + b^2\mathbb{P}(X = b) = b^2$, also $\mathrm{Var}(X) = b^2$.

"$\Rightarrow$": Wenn Gleichheit in (1) gilt, sind die Ungleichungen in der Lösung von a) zu Gleichungen geworden. Die erste Ungleichung ist genau dann eine Gleichung, wenn $\mathbb{E}[X] = 0$. Die zweite ist genau dann eine Gleichung, wenn

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[b^2 - X^2] = 0.$$

Für die Zufallsvariable $Y := b^2 - X^2$ gilt $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1$, da $\mathbb{P}(|X| \leq b) = 1$. Da $X \in \mathcal{L}^2$, gilt $Y \in \mathcal{L}^1$ und $\mathbb{E}[Y] = 0$. Dies impliziert nach Aufgabe 7.1 a) demnach
$$\mathbb{P}(|X| = b) = \mathbb{P}(X^2 = b^2) = \mathbb{P}(Y = 0) = 1.$$

Dies impliziert $\mathbb{P}(X = b) =: p = 1 - \mathbb{P}(X = -b)$ mit $p \in [0, 1]$ und wegen $\mathbb{E}[X] = 0$ folgt $p = \frac{1}{2}$.

□

Aufgabe 7.3. (schriftliche Aufgabe: 8 Punkte)
Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim Bin_{k_i,p}$ mit $p \in (0,1)$ und $k_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$. Betrachte nun $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Berechnen Sie die momentenerzeugenden Funktion $G_{S_n}(s)$ von S_n und bestimmen Sie damit die Verteilung und den Erwartungswert von S_n.

Beweis. Sei $X \sim Bin_{k,p}$. Dann gilt für die momentenerzeugenden Funktion:

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \cdot s^n = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \cdot s^n \\ &= \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (ps)^n (1-p)^{k-n} = (ps + (1-p))^k \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der binomische Lehrsatz angewendet wurde.
Nach Voraussetzung sind $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Somit sind auch X_1 und $X_2 + ... + X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, da zum einen $X_2 + ... + X_n$ durch mehrmaligem anwenden von Lemma 1.7.5 eine Zufallsvariable ist und folgende Gleichheit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 + ... + X_n = y) &= \sum_{\substack{x_2,...,x_n \in \mathbb{N}_0 \\ x_2+...+x_n=y}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) \\ &= \sum_{\substack{x_2,...,x_n \in \mathbb{N}_0 \\ x_2+...+x_n=y}} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \sum_{\substack{x_2,...,x_n \in \mathbb{N}_0 \\ x_2+...+x_n=y}} \mathbb{P}(X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 + ... + X_n = y) \end{aligned}$$

Anwenden von Lemma 1.10.4 liefert nun:

$$G_{S_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdot G_{X_2+...+X_n}(s), \qquad \forall s \in (-1, 1)$$

Induktiv folgt nun

$$G_{S_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdot G_{X_2}(s) \cdot ... \cdot G_{X_n}(s) = (ps + (1-p))^{k_1+...+k_n}$$

Theorem 1.10.2 liefert nun $S_n \sim Bin_{k_1+...+k_n,p}$ und

$$\mathbb{E}[S_n] = \lim_{s \uparrow 1} G'_{S_n}(s) = \lim_{s \uparrow 1} \left[p(k_1 + ... + k_n)(ps + (1-p))^{k_1+...+k_n-1} \right] = p(k_1 + ... + k_n)$$

$\square$

Aufgabe 7.4. (schriftliche Aufgabe: 12 Punkte)

(a) Sei $X \sim Uni([-\pi, \pi])$. Setze $Y := cos(X)$ und $Z := sin(X)$. Zeigen Sie, dass Y und Z nicht unabhängig aber unkorreliert sind.
(8 Punkte)

(b) Es seien X, Y zwei unabhängige $\text{Ber}_{\frac{1}{2}}$-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $X+Y$ und $|X-Y|$ unkorreliert sind, aber nicht unabhängig.
(4 Punkte)

Beweis. (a) Y und Z sind nicht unabhängig von einander:

$$\mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{\sqrt{2}}, Z > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathbb{P}\left(cos(X) > \frac{1}{\sqrt{2}}, sin(X) > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Dies kann aus der Gleichheit

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1 \qquad (**)$$

begründet werden.
Angenommen es existiert ein $x \in [-\pi, \pi]$ mit $sin(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$, dann würde auch $sin^2(x) + cos^2(x) > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ gelten, was ein Widerspruch zu $(**)$ ist.
Andererseits gilt $\mathbb{P}\left(sin(X) > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$ und $\mathbb{P}\left(cos(X) > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{\sqrt{2}}, Z > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq \mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbb{P}\left(Z > \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Y und Z sind jedoch unkorreliert:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} cos(x)sin(x)\mathrm{d}x = \left[-cos(x)^2\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} cos(x)sin(x)\mathrm{d}x \\
\Rightarrow &\int_{-\pi}^{\pi} cos(x)sin(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-cos(x)^2\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\
\Rightarrow &\ \mathbb{E}[YZ] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos(x)sin(x)\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

Es fehlen nun noch $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[Z]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[sin(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\
\mathbb{E}[Z] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sin(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[-cos(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun

$$Cov(Y, Z) = \mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z] = 0$$

(b) $X+Y$ und $|X-Y|$ sind nicht unabhängig, da

$$\mathbb{P}(X+Y=2, |X-Y|=1) = 0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X+Y=2)\mathbb{P}(|X-Y|=1).$$

Außerdem gilt

$$\mathbb{E}[(X+Y)|X-Y|] = 1 \times (\mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1)) = \frac{1}{2}$$

und

$$\mathbb{E}[X+Y] = 2\mathbb{P}(X=Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) = 1.$$

und

$$\mathbb{E}[|X-Y|] = 1 \times (\mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1)) = \frac{1}{2},$$

und somit

$$\mathrm{Cov}(X+Y, |X-Y|) = \mathbb{E}[(X+Y)|X-Y|] - \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[|X-Y|] = \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

$\square$