Übungsblatt 6: Lösungen

Aufgabe 6.1. (mündliche Aufgabe)
Sie sind ein großer Harry Potter Fan und sammeln die zugehörigen Lego Minifiguren. Es gibt insgesamt $s \in \mathbb{N}$ Figuren. Sie besitzen bereits $k \in \{0, \dots, s-1\}$ verschiedene Figuren. Jede Figur kommt mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einem Tütchen vor.

(a) Bestimmen Sie die erwartete Anzahl an Lego-Tütchen, die gekauft werden müssen, damit Sie eine neue Figur erwerben.

(b) Wie groß ist die erwartete Anzahl an Lego-Tütchen, die Sie kaufen müssen, um alle s Figuren zu erhalten.

(c) Es gibt ein Problem bei der Produktion. Die Lego-Tütchen werden leider nicht beschriftet, sodass es durchaus geschehen kann, dass Sie z. B. auch eine Star Wars Figur erhalten. Es wird nun angenommen, dass nur noch in jedem zehnten Tütchen eine Harry Potter Figur ist. Welche Auswirkungen hat diese Modifikation auf die vorherigen Rechnungen?

Beweis. Zu (a): Falls wir schon $k \geq 1$ Figuren besitzen, dann müssen wir eine der verbliebenen $s-k$ Figuren finden, um unsere Sammlung durch eine Figur zu erweitern. Kaufen wir ein Lego Figuren Tütchen, dann gilt also

$$P(\text{finden einer neuen Figur} \mid \text{Anzahl an bereits gefundenen Figuren} = k) = \frac{s-k}{s}.$$

Wir kaufen nun so lange Figuren, bis wir eine neue gefunden haben. Damit ist die Anzahl an benötigten Tütchen geometrisch-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = (s-k)/s$. Für den Erwartungswert einer geometrisch-verteilten Zufallsvariablen X gilt im Allgemeinen

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}. \tag{1}$$

Bezeichnen wir die Anzahl an Lego-Tütchen, die gekauft werden müssen, um eine neue Figur zu erhalten, mit X_k, dann folgt

$$\mathbb{E}[X_k] = \frac{s}{s-k}.$$

Ist $k = 0$, d.h. wir besitzen keine Figur, dann folgt direkt $\mathbb{E}[X_0] = X_0 = 1$.
Zu (b): Die erwartete Anzahl an Figuren, die gekauft werden müssen, um alle s Figuren zu erhalten, beträgt mit (a)

$$\sum_{k=0}^{s-1} \mathbb{E}[X_k] = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{s}{s-k} = s \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k}.$$

Ist nun s sehr groß, dann gilt also ungefähr

$$\sum_{k=0}^{s-1} \mathbb{E}[X_k] = s(\log(s) + \gamma + \varepsilon) \approx s \log(s),$$

wobei $\gamma = 0,5772156649$ die Euler-Mascheroni-Konstante und $\varepsilon > 0$ der Fehler der Approximation ist.
Zu (c): Ist nun nur in jedem zehnten Tütchen eine Harry Potter Figur, dann müssen wir erst ein entsprechendes Tütchen mit Figur finden. Die Wahrscheinlichkeit hierfür liegt bei 1/10. Bedingt auf das Ereignis, dass wir „ein Harry Potter Figuren Tütchen gefunden“ haben, ändert sich zu oben nichts. Es folgt also, dass die Wahrscheinlichkeit eine neue Figur zu finden, gegeben, dass wir bereits $k \geq 1$ Figuren besitzen, gegeben ist durch $\frac{1}{10} \cdot \frac{s-k}{s}$. Für $k = 0$ ist das Ereignis, eine neue Figur zu finden nun gleichwertig mit dem Ereignis ein Lego Tütchen mit Harry Potter Figur zu finden. Damit ist X_0 nun geometrisch-verteilt mit Parameter 1/10. Aus (1) folgt, dass wir alle oben berechneten Erwartungswerte mit 10 multiplizieren müssen. □

Aufgabe 6.2. (mündliche Aufgabe)

(a) Für jedes $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sei $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung, sodass $\mathbb{1}_A(x) = 1$, wenn $x \in A$, und $\mathbb{1}_A(x) = 0$, wenn $x \notin A$. Zeigen Sie für alle reellen Zufallsvariablen X, dass $\mathbb{1}_A(X)$ eine integrierbare Zufallsvariable ist, mit

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)] = \mathbb{P}(X \in A).$$

(b) Zeigen Sie, dass zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y genau dann identisch verteilt sind, wenn für alle Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $f(X)$ integrierbar ist,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$$

gilt.

(c) Finden Sie zwei integrierbare Zufallsvariablen X und Y, sodass XY nicht integrierbar ist.

(d) Finden Sie zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y, sodass X integrierbar ist, Y quasiintegrierbar ist, aber XY nicht quasiintegrierbar ist.

Beweis. (a) $\mathbb{1}_A(X)$ ist eine diskrete Zufallsvariable, weil $\mathbb{1}_A(X)^{-1}(\{1\}) = X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{1}_A(X)^{-1}(\{0\}) = X^{-1}(A)^c \in \mathcal{F}$. $\mathbb{1}_A(X)$ ist integrierbar, weil

$$\mathbb{E}[|\mathbb{1}_A(X)|] \leqslant \mathbb{E}[1] = 1.$$

Zum Schluss haben wir

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)] = 1 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{1}_A(X) = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{1}_A(X) = 0) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A(X) = 1) = \mathbb{P}(X \in A).$$

(b) “⇒“ Wenn X und Y identisch verteilte diskrete Zufallsvariablen sind, gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|f(X)|] &= \sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)|\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)|\mathbb{P}(Y = x) = \sum_{x \in Y(\Omega)} |f(x)|\mathbb{P}(Y = x) \\ &= \mathbb{E}[|f(Y)|]\end{aligned}$$

für alle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $f(X)$ integrierbar ist, und somit ist $f(Y)$ auch integrierbar. Die Gleichung

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$$

kann ähnlich bewiesen werden.
"$\Leftarrow$" Für jedes $t \in X(\Omega) \cup Y(\Omega)$ ist $\mathbb{1}_t(X)$ integrierbar, weil $|\mathbb{1}_t(X)| \leq 1$. Deswegen gilt

$$\mathbb{P}(X = t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_t(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_t(Y)] = \mathbb{P}(Y = t),$$

und somit sind X und Y identisch verteilt.

(c) Es sei X die diskrete Zufallsvariable auf $\mathbb{N}$ mit

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{c}{n^3} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $c^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-3}$, und $Y = X$. X und Y sind integrierbar, weil

$$\mathbb{E}[|X|] = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c}{n^2} < \infty.$$

XY ist nicht integrierbar, weil

$$\mathbb{E}[|XY|] = \mathbb{E}[X^2] = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c}{n} = \infty.$$

(d) Wir nehmen X die Zufallsvariable auf $\{-1, 1\}$ mit $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$ und Y die unabhängige von X Zufallsvariable auf $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit

$$\mathbb{P}(Y = n) = \begin{cases} \frac{c_1}{n^3}, & n \in \mathbb{N}, \\ \frac{c_2}{n^2}, & n \in -\mathbb{N}, \end{cases}$$

wobei $c_1^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n^3}$ und $c_2^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n^2}$. X ist integrierbar, weil $|X| \leq 1$, und Y ist quasiintegrierbar, weil

$$\mathbb{E}[Y^+] = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_1}{n^2} < \infty$$

und

$$\mathbb{E}[Y^-] = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(Y = -n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_2}{n} = \infty.$$

XY ist nicht integrierbar, weil

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(XY)^+] = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(XY = n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n\big(\mathbb{P}(Y = n, X = 1) + \mathbb{P}(Y = -n, X = -1)\big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_1}{2n^2} + \frac{c_2}{2n} = \infty\end{aligned}$$

und

$$\mathbb{E}[(XY)^-] = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(XY = -n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\big(\mathbb{P}(Y = n, X = -1) + \mathbb{P}(Y = -n, X = 1)\big)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_1}{2n^2} + \frac{c_2}{2n} = \infty.$$

$\square$

Aufgabe 6.3. (schriftliche Aufgabe: 11 Punkte)
Beweisen Sie die beiden Aussagen aus Prop. 1.9.4. Zu zeigen ist also:

(a) Sei X eine diskrete reelle Zufallsvariable, welche vom Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf den Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ abbildet. Der Erwartungswert sei wie in der Vorlesung wohldefiniert. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(X = x).$$

(6 Punkte)

(b) Sei X eine stetige reelle Zufallsvariable, welche vom Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf den Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ abbildet. ρ sei die zugehörige Dichte, sodass der Erwartungswert wie in der Vorlesung wohldefiniert ist. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \rho(x) \mathrm{d}x.$$

(5 Punkte)

Beweis.

(a) $X(\Omega)$ nimmt nach Voraussetzung Werte in $\mathbb{R}$ an. Da X eine diskrete Zufallsvariable ist, ist der Wertebereich von X abzählbar. Schreibe $X(\Omega) = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n < 0, \forall n < 0$ und $x_n \geq 0, \forall n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^+] &= \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X^+ \geq x) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbb{P}(X^+ \geq x) \mathrm{d}x + \int_0^{x_0} \mathbb{P}(X^+ \geq x) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbb{P}(X \geq x) \mathrm{d}x + \int_0^{x_0} \mathbb{P}(X \geq x) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbb{P}(X \geq x_{j+1}) \mathrm{d}x + \int_0^{x_0} \mathbb{P}(X \geq x_0) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (x_{j+1} - x_j) \cdot \mathbb{P}(X \geq x_{j+1}) + x_0 \cdot \mathbb{P}(X \geq x_0) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} x_j \cdot [\mathbb{P}(X \geq x_j) - \mathbb{P}(X \geq x_{j+1})] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich:

$$\mathbb{E}[X^-] = \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X^- \geq x)\mathrm{d}x = ... = \sum_{j=1}^{\infty} -x_{-j} \cdot \mathbb{P}(X = x_{-j})$$

Insgesamt erhält man somit:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-] = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j) = \sum_{x\in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Für den Fall, dass $X(\Omega)$ nur endlich viele negative Werte und/oder endlich viele positive Werte annimmt, geht die Rechnung analog.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-] &= \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X^+ \geq x)\mathrm{d}x - \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X^- \geq x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X^+ \geq x)\mathrm{d}x - \int_0^{-\infty} -\mathbb{P}(X \leq x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}(X \leq x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} \rho(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{-\infty}^{x} \rho(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{x\leq t\}}\rho(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{0} \rho(t)\mathbb{1}_{\{t\leq x\}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{t} \mathrm{d}x\right)\rho(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} \left(\int_t^{0} \mathrm{d}x\right)\rho(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} t \cdot \rho(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} -t \cdot \rho(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} t \cdot \rho(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} t \cdot \rho(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \rho(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.4. (schriftliche Aufgabe: 9 Punkte)

Es seien $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable.

(a) Zeigen Sie, dass $aX + b$ eine $\mathcal{N}(a\mu + b, (a\sigma)^2)$-verteilte Zufallsvariable für alle $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ ist.
(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Zufallsgröße $(X-\mu)^k$ integrierbar ist mit

$$\mathbb{E}[(X-\mu)^k] = \begin{cases} \sigma^k \prod_{p=1}^{k/2}(2p-1), & \text{wenn } k \text{ gerade ist,} \\ 0, & \text{wenn } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

(6 Punkte)
Hinweis: Sie können benutzen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante c_k existiert, sodass für alle $x \geq 0$, $x^k \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \leq c_k \exp(-\frac{x^2}{4\sigma^2})$ gilt.

Beweis. (a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(aX+b \leq t) = \mathbb{P}(X \leq (t-b)/a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{t} \exp\Big(-\frac{\big((u-b)/a-\mu\big)^2}{2\sigma^2}\Big)\frac{\mathrm{d}u}{a}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(a\sigma)^2}} \int_{-\infty}^{t} \exp\Big(-\frac{(u-(b+a\mu))^2}{2(a\sigma)^2}\Big)\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

wobei $u = ax+b$.

(b) Durch a) ist $X-\mu$ eine $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable. Wenn k ungerade ist, gilt

$$\mathbb{E}\big[\big((X-\mu)^k\big)^+\big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty x^k \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)\mathrm{d}x \leq \frac{c_k}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty \exp\Big(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\Big)\mathrm{d}x < \infty$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\big((X-\mu)^k\big)^-\big] &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^0 x^k \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)\mathrm{d}x \\ &\overset{(u=-x)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty u^k \exp\Big(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big)\mathrm{d}u = \mathbb{E}\big[\big((X-\mu)^k\big)^+\big] < \infty\end{aligned}$$

und somit ist $(X-\mu)^k$ integrierbar mit $\mathbb{E}[(X-\mu)^k] = 0$. ($(X-\mu)^k$ ist symmetrisch). Wenn k gerade ist, gilt $(X-\mu)^k \geq 0$ und

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X-\mu)^k\big] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty x^k \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^0 x^k \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{2c_k}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty \exp\Big(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\Big)\mathrm{d}x < \infty.\end{aligned}$$

Außerdem haben wir durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-\mu)^k] &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^\infty x^{k-1} \cdot \Big(-\frac{x}{\sigma^2}\Big) \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \Big[x^{k-1} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)\Big]_{-\infty}^\infty + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^\infty (k-1)x^{k-2} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)\mathrm{d}x \\ &= \sigma^2(k-1)\mathbb{E}[(X-\mu)^{k-2}].\end{aligned}$$

Über Induktion zeigen wir nun für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\mathbb{E}[(X-\mu)^{2n}] = \sigma^{2n} \prod_{p=1}^{n} (2p-1). \tag{2}$$

- Induktionsanfang: $\mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[(X-\mu)^0] = \sigma^2$
- Induktionsschritt: Wenn die Induktionsvoraussetzung (2) gilt, dann ergibt sich für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-\mu)^{2(n+1)}] = \sigma^2(2n+1)\mathbb{E}[(X-\mu)^{2n}] = \sigma^2(2n+1) \cdot \sigma^{2n} \prod_{p=1}^{n}(2p-1) \\ = \sigma^{2(n+1)} \prod_{p=1}^{n+1} (2p-1).\end{aligned}$$

$\square$