Übungsblatt 5: Lösungen

Aufgabe 5.1. (mündliche Aufgabe) Es sei F eine Verteilungsfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass F eine Dichte besitzt, wenn F stetig differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass F stetig ist, wenn F eine Dichte besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass F linksseitige Limiten besitzt, das heißt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ der Limes

$$\lim_{h \downarrow 0} F(x-h)$$

existiert. Man nennt F „càdlàg“ („continue à droite, limite à gauche“), wenn die Funktion rechtsstetig ist und linksseitige Limiten besitzt.

(d) Es sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P} \circ X^{-1}((-\infty, x]) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass F genau dann stetig in $t \in \mathbb{R}$ ist, wenn $\mathbb{P}(X = t) = 0$.

Beweis. (a) Wenn F stetig differenzierbar ist, gibt es nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Funktion f, sodass

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t$$

für alle $a < x$ und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $\lim\limits_{a \to -\infty} F(a) = 0$. Da F monoton steigend ist, gilt ferner $f(x) = F'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist das Integral monoton in a und beschränkt durch $F(x) \in [0,1]$, daher existiert der Limes $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t := \int_{-\infty}^x f(t) \,\mathrm{d}t$ und wir erhalten

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \,\mathrm{d}t.$$

(b) Dies ergibt sich direkt aus der Stetigkeit des Integrals $x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) \,\mathrm{d}t$.

(c) Da F nicht fallend und beschränkt durch 1 ist, gilt $F(x-) := \lim_{h \downarrow 0} F(x-h) = \sup_{h>0} F(x-h) \in [0,1]$. Die letzte Gleichheit kann wie folgt erklärt werden: “$\leq$“ ist klar. Für “$\geq$“ sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ derart, dass

$$F(x - \delta_0) > \sup_{h>0} F(x-h) - \varepsilon.$$

Wegen der Monotonie gilt demnach $F(x-\delta) > \sup_{h>0} F(x-\delta) - \varepsilon$ für alle $\delta \in (0, \delta_0]$ und damit

$$\lim_{h \to 0} F(x-h) > \sup_{h>0} F(x-h) - \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt “$\geq$“.

(d) Wegen der Stetigkeit von unten gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < t) &= \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, t - \frac{1}{n}]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \in (-\infty, t - \frac{1}{n}]\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \in (-\infty, t - \frac{1}{n}]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq t - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} F(t - \frac{1}{n}) = F(t-).\end{aligned}$$

F ist genau dann stetig in t, wenn $F(t-) = F(t)$ ist, dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathbb{P}(X = t) = F(t) - F(t-) = 0$.

□

Aufgabe 5.2. (mündliche Aufgabe)

(a) Es seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in (a, \infty) \cup \{\infty\}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $U : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to ((0,1), \mathcal{B}((0,1)))$ eine Uni$(0,1)$-verteilte Zufallsvariable.

  (i) Sei F eine Verteilungsfunktion, die stetig auf $\mathbb{R}$ und streng steigend auf (a, b) ist, sowie $F(x) \in \{0, 1\}$ für alle $x \notin (a, b)$. Zeigen Sie, dass $X := F^{-1}(U)$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F ist.

  (ii) Sei $p > 0$. Betrachte nun $X := -\frac{1}{p}\log(U)$. Was ist die Verteilung von X?

(b) Sei X eine reelle Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Verteilungsfunktion F. Die Menge der Sprungstellen von F wird mit $\mathcal{S}$ bezeichnet. Zeigen Sie:

  (i) F besitzt höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

  (ii) X ist genau dann diskret verteilt, wenn

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \{F(x) - \lim_{y \uparrow x} F(y)\} = 1$$

Beweis. (a) (i) Da F stetig und streng steigend ist und $F(x) \in \{0, 1\}$ für alle $x \notin (a, b)$, ist F eine Bijektive Funktion von (a, b) nach $(0, 1)$. X ist eine Zufallsvariable durch Lemma 1.7.5 im Skript, weil F^{-1} stetig ist
Für alle $x \in (a, b)$ gilt

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x).$$

Wegen $F^{-1}(u) \in (a, b)$ für alle $u \in (0, 1)$, gilt sowohl für $x \leq a$, dass $F(x) = 0$, sowie für $x \geq b$, dass $F(x) = 1$. Daher gilt

$$\mathbb{P}(X \leq x) \begin{cases} = \mathbb{P}(U \leq 0) = 0, & x \leq a, \\ = \mathbb{P}(U \leq 1) = 1, & x \geq b. \end{cases}$$

(ii) Es sei $F(x) = (1 - e^{-px})\mathbb{1}_{x>0}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist F die Verteilungsfunktion einer Exp(p)-verteilten Zufallsvariable, weil

$$\int_0^x pe^{-pt}\mathrm{d}t = 1 - e^{-px} \text{ für alle } x \in (0, \infty)$$

gilt. F ist eine stetige und streng steigende auf $(0, \infty)$ Verteilungsfunktion mit Kehrwertfunktion $F^{-1}(x) = -\frac{1}{p}\log(1-x)$ für alle $x \in [0,1]$ und $1-U$ ist eine Uni$[0,1]$-verteilte Zufallsvariable. Deshalb ist $X = -\frac{1}{p}\log(1-(1-U))$ eine Exp(p)-verteilte Zufallsvariable durch c)

(b) (i) Definierte $\mathcal{A}_k := \{x \in \mathbb{R} | F(x) - F(x-) \geq \frac{1}{k}\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \text{ und } |\mathcal{A}_k| \leq k, \text{ da } F \leq 1$$

$\Rightarrow \mathcal{S}$ ist als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen wieder abzählbar.

(ii) „ $\Rightarrow$ “ X sei diskret

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \{x \mid F(x) - F(x-) \neq 0\} = \{x \mid \mathbb{P}(X = x) \neq 0\}$$
$$\Rightarrow \sum_{x \in \mathcal{S}} (F(x) - F(x-)) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

„ $\Leftarrow$ “ Es gilt $\sum_{x \in \mathcal{S}}(F(x) - F(x-)) = 1$

$$\Rightarrow P_X(\mathcal{S}) = 1 \text{ und } P_X(\mathcal{S}^c) = 0$$
$$\Rightarrow X : \Omega \to \mathcal{S} \text{ und} \mathcal{S} \text{ nach (i) abzählbar}$$
$$\Rightarrow X \text{ ist diskret verteilt}$$

□

Aufgabe 5.3. (schriftliche Aufgabe: 10 Punkte)
Für jedes $a > 0$ sei $(X_i^a)_{i\in\mathbb{N}}$ eine u.i.v. Familie von Uni$[0,a]$-verteilten Zufallsvariablen, $m_n^a := \inf\{X_1^a, \ldots, X_n^a\}$ und $M_n^a := \sup\{X_1^a, \ldots, X_n^a\}$

(a) Berechnen Sie für alle $a > 0$

  (i) die Verteilungsfunktion F_n^a und die Dichte f_n^a von m_n^a
  (4 Punkte)

  (ii) die Verteilungsfunktion G_n^a und die Dichte g_n^a von M_n^a
  (4 Punkte)

(b) Zeigen Sie $F_n^n(x) \to F(x)$ für $n \to \infty$ und alle $x \in \mathbb{R}$, wobei F die Verteilungsfunktion einer Exp(1)-verteilten Zufallsvariable ist und F_n^n die Verteilungsfunktion von m_n^a aus (a)(i) mit $a = n$ ist.
(2 Punkte)

Beweis. (a) (i) Für alle $x \in [0,a]$ gilt $m_n^a > x$ genau dann, wenn $X_1 > x, \ldots, X_n > x$, und somit

$$F_n^a(x) = 1-\mathbb{P}(m_n^a > x) = 1-\mathbb{P}(X_1 > x)^n = 1-\Big(1-\frac{x}{a}\Big)^n \quad \text{für alle } x \in [0,a],$$

weil $(X_1^a, \ldots, X_n^a)$ eine u.i.v. Familie von Uni$[0,a]$ ist. Außerdem $F_n^a(x) = 0$ für alle $x < 0$ und $F_n^a(x) = 1$ für alle $x > a$. Es sei

$$f_n^a(x) = \begin{cases} \frac{n(1-\frac{x}{a})^{n-1}}{a}, & x \in [0,a], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

denn für alle $x \in [0,a]$

$$\int_{-\infty}^x f_n^a(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{n(1-\frac{t}{a})^{n-1}}{a}\mathrm{d}t = 1 - \big(1-\frac{x}{a}\big)^n = F_n^a(x)$$

und $\int_{-\infty}^x f_n^a(t)\mathrm{d}t = F_n^a(x)$ für alle $x \notin [0,a]$, und somit ist f_n^a die Dichte von m_n^a.

(ii) Für alle $x \in [0,a]$ gilt $M_n^a \le x$ genau dann, wenn $X_1 \le x, \ldots, X_n \le x$, und somit

$$G_n^a(x) = \mathbb{P}(M_n^a \le x) = \mathbb{P}(X_1 \le x)^n = \Big(\frac{x}{a}\Big)^n \quad \text{für alle } x \in [0,a],$$

weil $(X_1^a, \ldots, X_n^a)$ eine u.i.v. Familie von Uni$[0,a]$ ist. Außerdem $G_n^a(x) = 0$ für alle $x < 0$ und $G_n^a(x) = 1$ für alle $x > a$. Es sei

$$g_n^a(x) = \begin{cases} n\frac{x^{n-1}}{a^n}, & x \in [0,a], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

denn für alle $x \in [0,a]$

$$\int_{-\infty}^{x} g_n^a(t)\mathrm{d}t = \int_0^x n\frac{t^{n-1}}{a^n}\mathrm{d}t = \left(\frac{x}{a}\right)^n = G_n^a(x)$$

und $\int_{-\infty}^{x} g_n^a(t)\mathrm{d}t = G_n^a(x)$ für alle $x \notin [0,a]$, und somit ist g_n^a die Dichte von M_n^a.

(b) Für alle $x \in [0,\infty)$ und $n > x$ gilt

$$F_n^n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \exp(-x)$$

und

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^x = 1 - \exp(-x).$$

Zum Schluss haben wir $F_n^n(x) = F(x) = 0$ für alle $x < 0$.

□

Aufgabe 5.4. (schriftliche Aufgabe: 10 Punkte)
Zeigen Sie, dass die nachstehenden Funktionen Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}$ sind. Berechnen Sie zudem die zugehörigen Verteilungsfunktionen:

(a) Für $\alpha, \sigma > 0$ sei

$$f(x) = \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

(5 Punkte)

(b)

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

(5 Punkte)

Beweis. (a) f ist eine Dichtefunktion, denn:

(i) Die Funktion f ist aufgrund der Indikatorfunktion, der e-Funktion und der Wahl der Parameter nichtnegativ. Es gilt also $f(x) \geq 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,dx \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^{\infty} \exp(-t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\Big[-\exp(-t)\Big]_{t=0}^{t=R} \\
&= \lim_{R\to\infty} \exp(-R) - (-\exp(-0)) = 1
\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ $t = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}$ substituiert wurde.

Die zu f zugehörige Verteilungsfunktion F lautet

$F(x) = 0$, für $x < 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = ... = \Big[-\exp(-t)\Big]_{t=0}^{t=\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\alpha} = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\alpha\right)$, für $x \geq 0$.

Auch hier wurde eine Substitution durchgeführt.

(b) (i) Die Funktion g ebenfalls nichtnegativ, da x^2 vorliegt. Auch hier gilt somit $g(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(ii)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)}\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\Big[\arctan(x)\Big]_{x=-R}^{x=R} \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}(\arctan(R) - \arctan(-R)) = 1\end{aligned}$$

Die zu g zugehörige Verteilungsfunktion G lautet:

$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = ... = \lim_{R\to\infty}\Big[\arctan(t)\Big]_{t=-R}^{t=x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$, für $x \in \mathbb{R}$.

Bem.: Die Funktion f ist die Dichtefunktion der sogenannten Weibull-Verteilung mit Shape-Parameter $\alpha > 0$ und Skalenparameter $\sigma > 0$ und g die Dichtefunktion der Standard-Cauchy-Verteilung.

□