Übungsblatt 4: Lösungen

Aufgabe 4.1. (mündliche Aufgabe)
Zeigen Sie, dass eine nicht konstante, diskrete Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{N}$ genau dann geometrisch verteilt ist, wenn sie „gedächtnislos“ ist, das heißt, wenn

$$\mathbb{P}\left(X > k + j \mid X > j\right) = \mathbb{P}\left(X > k\right) \quad \text{für alle } j, k \in \mathbb{N}_0$$

gilt.

Beweis. "⇒": Wenn X geometrisch verteilt ist, so gilt für $n \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > n) &= \sum_{l=n+1}^{\infty} p(1-p)^{l-1} = p(1-p)^n \sum_{l=1}^{\infty}(1-p)^{l-1} \\ &= p(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n.\end{aligned}$$

Für $k, j \geqslant 0$ gilt $\{X > k+j\} \subset \{X > j\}$. Somit ist die linke Seite in der Gleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > k+j)/\mathbb{P}(X > j) &= \frac{(1-p)^{k+j}}{(1-p)^j} = (1-p)^k \\ &= \mathbb{P}(X > k).\end{aligned}$$

"⇐": Wir definieren $f_n := \mathbb{P}(X > n)$, $n \geqslant 0$. Da X nur Werte in $\mathbb{N}$ hat, gilt $f_0 = 1$. Da X nicht konstant ist, muss $f_1 := p > 0$ gelten. Erneut wegen $\{X > k+j\} \subset \{X > j\}$ für $k, j \geqslant 0$ folgt aus der Gleichheit mit der Wahl $j = 1$ für $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned}f_{k+1}/f_1 &= f_k \\ f_{k+1} &= f_k \cdot f_1 = f_k \cdot p.\end{aligned}$$

Per Induktion erhalten wir $f_k = p^k$ für alle $k \geqslant 1$. Schließlich erhalten wir für $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = f_{k-1} - f_k \\ &= p^{k-1}(1-p).\end{aligned}$$

Also ist X geometrisch verteilt mit Parameter $1 - p$.

□

Aufgabe 4.2. (mündliche Aufgabe)

(a) Es seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine u.i.v. Familie von Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter $p \in (0,1)$ und $Y = \inf\{n \in \mathbb{N} : \ X_n = 1\}$. Zeigen Sie, dass Y eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter p ist.

(b) Es seien $(Y_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine u.i.v. Familie von geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit Parameter $p \in (0,1)$ und $Z = \inf_{i \in \{1,\ldots,n\}} Y_i$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(Z \geqslant m) = \mathbb{P}(Y_1 \geqslant m)^n \text{ für alle } m \in \mathbb{N}$$

gilt und dass Z eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $1 - (1-p)^n$ ist.

Beweis. (a) Es gilt $Y = 1$ genau dann wenn $X_1 = 1$, also $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p$. Für alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $Y = m$ genau dann, wenn $X_1 = \cdots = X_{m-1} = 0$ und $X_m = 1$, und somit

$$\mathbb{P}(Y = m) = \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_{m-1} = 0,\ X_m = 1) = \mathbb{P}(X_m = 1) \prod_{i=1}^{m-1} \mathbb{P}(X_i = 0) = p(1-p)^{m-1}.$$

(b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $Z \geqslant m$ genau dann, wenn $Y_i \geqslant m$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$, und somit

$$\mathbb{P}(Z \geqslant m) = \mathbb{P}(Y_1 \geqslant m, \dots, Y_n \geqslant m) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i \geqslant m) = \mathbb{P}(Y_1 \geqslant m)^n,$$

weil $(Y_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ eine u.i.v. Familie ist. Außerdem

$$\mathbb{P}(Y_1 \geqslant m) = \sum_{j=m}^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 = j) = \sum_{j=m}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = \frac{p(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{m-1}.$$

Wir erhalten für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = m) &= \mathbb{P}(Z \geqslant m) - \mathbb{P}(Z \geqslant m+1) = (1-p)^{n(m-1)} - (1-p)^{nm} \\ &= (1-p)^{n(m-1)}\big(1-(1-p)^n\big) = \big(1-(1-(1-p)^n)\big)^{m-1}\big(1-(1-p)^n\big).\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 4.3. (schriftliche Aufgabe: 10 Punkte)
Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathrm{Poi}_\nu$ und $Y \sim \mathrm{Poi}_\mu$ für $\nu, \mu > 0$.

(a) Zeigen Sie $X + Y \sim \mathrm{Poi}_{\nu+\mu}$.
(5 Punkte)

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die Verteilung von X unter dem (bedingten) Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}(\cdot\,|X+Y=n)$ gilt

$$\mathbb{P}(\cdot\,|X+Y=n) \circ X^{-1} = \mathrm{Bin}_{n,\frac{\nu}{\nu+\mu}}.$$

(5 Punkte)

Beweis. (a) Da X und Y diskret auf $\mathbb{N}_0$ verteilt sind, trifft dies auch auf $X+Y$ zu. Sei also $k \in \mathbb{N}_0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k) &= \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{l=0}^{\infty}\{X+Y=k, Y=l\}\right)\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{P}(X+Y=k, Y=l) = \sum_{l=0}^{\infty}\underbrace{\mathbb{P}(X=k-l)}_{=0 \text{ für } l>k}\mathbb{P}(Y=l)\\ &= \sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}(X=k-l)\mathbb{P}(Y=l) = \sum_{l=0}^{k} e^{-\nu}\frac{\nu^{k-l}}{(k-l)!}e^{-\mu}\frac{\mu^l}{l!}\\ &= e^{-(\nu+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mu^l\nu^{k-l} = e^{-(\nu+\mu)}\frac{1}{k!}(\nu+\mu)^k,\end{aligned}$$

was die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine $\mathrm{Poi}_{\nu+\mu}$-verteilte Zufallsvariable den Wert k annimmt.

(b) Da X unter $\mathbb{P}$ diskret auf $\mathbb{N}_0$ verteilt ist, trifft dies auch auf die (bedingte) Verteilung unter $\mathbb{P}(\cdot\,|X+Y=n)$ zu. Sei daher $k \in \mathbb{N}_0$. Dann haben wir für $k > n$ wegen $\mathbb{P}(Y<0) = 0$ folglich $\mathbb{P}(X=k, X+Y=n) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) = 0$ und daher

$$\mathbb{P}(X=k\,|X+Y=n) = 0 \quad \text{für } k > n.$$

Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ haben wir

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{P}(\cdot \mid X+Y=n) \circ X^{-1}\right)(\{k\}) &= \mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) \\
&= \mathbb{P}(X=k, X+Y=n)/\mathbb{P}(X+Y=n) \\
&= \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)/\mathbb{P}(X+Y=n) \\
&\overset{a)}{=} \frac{e^{-\nu}\frac{\nu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\mu+\nu)}\frac{(\nu+\mu)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\nu^k \mu^{n-k}}{(\nu+\mu)^n} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\nu+\mu}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^k \left(1-\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine $\mathrm{Bin}_{n,\frac{\nu}{\nu+\mu}}$-verteilte Zufallsvariable den Wert k annimmt.

□

Aufgabe 4.4. (schriftliche Aufgabe: 10 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{1,2,3\}^2$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und $\mathbb{P}$, welches durch die Zähldichte p_ω gegeben ist

ω_1 \ ω_2	1	2	3
1	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$
2	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$
3	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$

Für die nachstehenden Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \Omega_i'$ sollen Sie nun den Wertebereich Ω_i' und die Verteilung $\mathbb{P}_{X_i}$ an, $i \in \{1,2,3,4\}$ angeben (Die zugehörige σ-Algebra zu Ω_i' sei $\mathcal{E} = 2^{\Omega_i'}$).

(a) $X_1(\omega) = \omega_1$ (2,5 Punkte)

(b) $X_2(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ (2,5 Punkte)

(c) $X_3(\omega) = max\{\omega_1, \omega_2\}$ (2,5 Punkte)

(d) $X_4(\omega) = max\{\omega_1, \omega_2\} - min\{\omega_1, \omega_2\}$ (2,5 Punkte)

Beweis. (a)

$$
\begin{aligned}
X_1(\omega) = \omega_1 \text{ hat den Wertebereich } \Omega_1' = \{1, 2, 3\}. \\
\mathbb{P}(X_1 = 1) &= \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \in \Omega) \mid \omega_1 = 1) = \mathbb{P}(\{(1,1), (1,2), (1,3)\}) \\
&= \frac{1}{20} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}(X_1 = 2) &= ... = \frac{3}{10}\ ,\ \mathbb{P}(X_1 = 3) = ... = \frac{9}{20}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
X_2(\omega) = \omega_1 + \omega_2 \text{ hat den Wertebereich } \Omega_2' = \{2, 3, 4, 5, 6\}. \\
\mathbb{P}(X_2 = 2) &= \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \in \Omega) \mid \omega_1 + \omega_2 = 2) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{20} \\
\mathbb{P}(X_2 = 3) &= ... = \frac{5}{20}\ ,\ \mathbb{P}(X_2 = 4) = ... = \frac{3}{10}\ ,\ \mathbb{P}(X_2 = 5) = ... = \frac{3}{10}\ , \\
\mathbb{P}(X_2 = 6) &= ... = \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
X_3(\omega) = max\{\omega_1, \omega_2\} \text{ hat den Wertebereich } \Omega_3' = \{1, 2, 3\}. \\
\mathbb{P}(X_3 = 1) &= \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \in \Omega) \mid max\{\omega_1, \omega_2\} = 1) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{20} \\
\mathbb{P}(X_3 = 2) &= ... = \frac{3}{10}\ ,\ \mathbb{P}(X_3 = 3) = ... = \frac{13}{20}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
X_4(\omega) = max\{\omega_1, \omega_2\} - min\{\omega_1, \omega_2\} \text{ hat den Wertebereich } \Omega_4' = \{0, 1, 2\}. \\
\mathbb{P}(X_3 = 0) &= \mathbb{P}((\omega_1, \omega_2) \in \Omega) \mid max\{\omega_1, \omega_2\} - min\{\omega_1, \omega_2\} = 0) \\
&= \mathbb{P}(\{(1,1), (2,2), (3,3)\}) = \frac{1}{5} \\
\mathbb{P}(X_4 = 1) &= ... = \frac{11}{20}\ ,\ \mathbb{P}(X_4 = 2) = ... = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

□