Übungsblatt 3: Lösungen

Aufgabe 3.1. (mündliche Aufgabe)
In einer Klausur gibt es eine "multiple-choice"-Frage, bei welcher genau eine von vier möglichen Antworten richtig ist. Wir nehmen an, dass Anne mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% die richtige Antwort weiß und andernfalls rät. Boris weiß die richtige Antwort mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% und rät sonst ebenfalls.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anne die Frage richtig beantwortet?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Boris die Frage richtig beantwortet?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anne die richtige Antwort wusste, gegeben dass sie richtig geantwortet hat?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Boris die richtige Antwort wusste, gegeben dass er richtig geantwortet hat?

Beweis. (a) Bezeichnen wir mit K_A das Ereignis, dass Anne die erste Antwort korrekt beantwortet, mit R_A das Ereignis, dass Anne die erste Antwort rät und mit W_A das Ereignis, dass Anne die erste Antwort weiss, so erhalten wir mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit (beachte $P(W_A) + P(R_A) = 1$):

$$\begin{aligned} P(K_A) &= P(K_A|R_A)P(R_A) + P(K_A|W_A)P(W_A) \\ &= 0.25 \cdot 0.2 + 1 \cdot P(W_A) = 0.85. \end{aligned}$$

(b) Mit den analogen Bezeichnungen K_B, R_B und W_B gilt

$$\begin{aligned} P(K_B) &= P(K_B|R_B)P(R_B) + P(K_B|W_B)P(W_B) \\ &= 0.25 \cdot 0.5 + 1 \cdot P(W_B) = 0.625. \end{aligned}$$

(c) Die Formel von Bayes liefert

$$\begin{aligned} P(W_A|K_A) = &\frac{P(K_A|W_A)P(W_A)}{P(K_A|W_A)P(W_A) + P(K_A|R_A)P(R_A)} \\ &\frac{1 \cdot P(W_A)}{1 \cdot P(W_A) + 0.25 \cdot 0.2} = \frac{0.8}{0.8 + 0.05} = \frac{0.8}{0.85} \approx 0.941. \end{aligned}$$

(d) Auch hier liefert die Formel von Bayes

$$\begin{aligned} P(W_B|K_B) = &\frac{P(K_B|W_B)P(W_B)}{P(K_B|W_B)P(W_B) + P(K_B|R_B)P(R_B)} \\ &\frac{1 \cdot P(W_B)}{1 \cdot P(W_B) + 0.25 \cdot 0.5} = \frac{0.5}{0.5 + 0.125} = \frac{0.5}{0.625} = 0.8. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.2. (mündliche Aufgabe)
In den drei ersten Fragen dieser Aufgabe bezeichnet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, $(E, \mathcal{E})$ einen Messraum und X, Y und Z jeweils Zufallsvariablen von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nach $(E, \mathcal{E})$.

(a) Zeigen Sie, dass wenn $X = Y$ gilt, dann haben X und Y die gleiche Verteilung. Gilt diese Aussage auch umgekehrt?

(b) Finden Sie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und X, Y, Z, sodass X und Y die gleiche Verteilung haben, aber nicht XZ und YZ.

(c) Es seien $(E', \mathcal{E}')$ ein weiterer Messraum und $f : E \to E'$ eine $\mathcal{E} - \mathcal{E}'$-messbare Abbildung. Zeigen Sie, dass $f \circ X$ eine Zufallsvariable von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nach $(E', \mathcal{E}')$ ist mit

$$\mathbb{P} \circ (f \circ X)^{-1} = (\mathbb{P} \circ X^{-1}) \circ f^{-1}.$$

(d) Es sei $\mathcal{F}' = \sigma\big(\{\{x\},\ x \in \mathbb{R}\}\big)$ und

$$\begin{array}{cccc} f: & (\mathbb{R}, \mathcal{F}') & \to & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ & x & \mapsto & x. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}'$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist f eine $\mathcal{F}' - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung? Sie können Aufgabe 1.4 benutzen.

Beweis. (a) Wenn $X = Y$, dann gilt für alle $A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P} \circ X^{-1}(A) = \mathbb{P}\big(X^{-1}(A)\big) = \mathbb{P}\big(Y^{-1}(A)\big) = \mathbb{P} \circ Y^{-1}(A)$.
Wir betrachten $\Omega = \{\omega : \omega \in \{1, 2\}\}$, und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ der zugehörige Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei $X = Z = \mathbb{1}_{\{\omega=1\}}$, $Y = \mathbb{1}_{\{\omega=2\}}$.
Da $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2}$, haben X und Y die gleiche Verteilung, aber $X \neq Y$.

(b) Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und X, Y, Z wie in a). Dann $XZ = X$ und $YZ = YX = 0$, und somit XZ und YZ nicht die gleiche Verteilung haben.

(c) $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ für alle $A \in \mathcal{E}'$, und somit

$$(f \circ X)^{-1}(A) = X^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) \in \mathcal{F}$$

gilt, weil X eine Zufallsvariable ist. Per Definition ist $f \circ X$ eine Zufallsvariable von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nach $(E', \mathcal{E}')$.
Außerdem gilt für alle $A \in \mathcal{E}'$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \circ (f \circ X)^{-1}(A) &= \mathbb{P}\big((f \circ X)^{-1}(A)\big) = \mathbb{P}\big(X^{-1}\big(f^{-1}(A)\big)\big) \\ &= \mathbb{P} \circ X^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) = (\mathbb{P} \circ X^{-1}) \circ f^{-1}(A). \end{aligned}$$

(d) Für alle $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{x\}) = \{x\} \in \mathcal{F}'$ per Definition. (1 Punkt)
Es sei $A = [0,1]$, dann sind $f^{-1}(A) = [0,1]$ und $(f^{-1}(A))^c = \mathbb{R} \setminus [0,1]$ nicht abzählbar und wegen Aufgabe 1.4.a) ist $f^{-1}(A)$ nicht in $\mathcal{F}'$, und somit ist f keine $\mathcal{F}' - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung.

$\square$

Aufgabe 3.3. (schriftliche Aufgabe: 10 Punkte)

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(E, \mathcal{E})$ Messraum, wobei E abzählbar und $\mathcal{E} = 2^E$ sei. Zeigen Sie, dass eine (diskrete) Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ unabhängig von sich selbst ist, genau dann, wenn ein $x \in E$ existiert, sodass

$$\mathbb{P}(X = x) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X = y) = 0 \quad \text{für alle } y \neq x$$

gilt.
(6 Punkte)

(b) Es seien $\Omega = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $\mathcal{F}$ und $\mathbb{P}$ so, dass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ der Laplace Wahrscheinlichkeitsraum ist. Finden Sie Mengen A_1, A_2, $A_3 \in \mathcal{F}$ derart, dass A_1 und A_2 sowie A_1 und A_3 unabhängig sind,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

gilt, aber (A_1, A_2, A_3) nicht unabhängig ist.
(4 Punkte)

Beweis. (a) '$\Rightarrow$': Es sei X unabhängig von sich selbst, d.h. die σ-Algebra $X^{-1}(\mathcal{E}) := \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$ unabhängig von sich selbst. Dies bedeutet, dass $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{X \in A\}) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in A)$ für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt. Daraus folgt

$$\mathbb{P}(X \in A) \in \{0, 1\} \text{ für alle } A \in \mathcal{E}.$$

Insbesondere gilt $\mathbb{P}(X = x) \in \{0, 1\}$ für alle $x \in E$. Da $\mathbb{P}(X \in E) = 1$ gelten muss, haben wir mithilfe der σ-Additivität

$$1 = \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\Big(\dot{\bigcup_{x \in E}} \{X = x\}\Big) = \sum_{x \in E} \underbrace{\mathbb{P}(X = x)}_{\in\{0,1\}}.$$

Daraus folgt die zweite Aussage.

'$\Leftarrow$': Es sei $A \in \mathcal{E}$, dann

$$\mathbb{P}\big(X^{-1}(A)\big) = \sum_{y \in A} \mathbb{P}(X = y) \in \{0, 1\}$$

gilt und somit $\mathbb{P}\big(X^{-1}(A)\big)\mathbb{P}\big(X^{-1}(A)\big) = \mathbb{P}\big(X^{-1}(A) \cap X^{-1}(A)\big)$. Für $A, B \in \mathcal{E}$ betrachte die Fälle $x \in A$ & $x \notin B, x \in B$ & $x \notin A, \ldots$. Wir erhalten, dass $X^{-1}(\mathcal{E})$ unabhängig von sich selbst ist, und somit auch X.

(b) Wähle $A_1 := \{1,2,3,4\}$, $A_2 := \{1,2,5,6\}$ und $A_3 := \{1,3,7,8\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(\{1,2\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2), \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathbb{P}(\{1,3\}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3), \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3), \quad \text{aber} \\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.4. (schriftliche Aufgabe: 10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Falls $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie unabhängiger Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist und $f \in \{0,1\}^\Lambda$, so ist auch die Familie definiert durch

$$B_\lambda := \begin{cases} A_\lambda, & \text{if } f(\lambda) = 0, \\ A_\lambda^c, & \text{if } f(\lambda) = 1, \end{cases}$$

unabhängig.
(7 Punkte)

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $A, B, C \in \mathcal{F}$ unabhängige Ereignisse. Beweisen Sie:

(i) A und $B \cap C$ sind unabhängig.

(ii) $A \cup B$ und C sind unabhängig.

(iii) $\sigma(\{A\})$ und $\sigma(\{B\})$ sind unabhängig.

(3 Punkte)

Beweis. (a) Zu zeigen ist: $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \Lambda$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_{\lambda_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_{\lambda_j})$$

Sei $k = \left|\left\{j \in \{1,...,n\} | B_{\lambda_j} = A_{\lambda_j}^c\right\}\right|$. Der Beweis wird per Induktion über k durchgeführt:

I.A.: $k = 0$ gilt nach Voraussetzung
I.S.: $k \to k+1$: OBdA sei $B_{\lambda_1} = A_{\lambda_1}^c$. Bekannt ist, dass $A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_1}^c = \Omega$. Daraus ergibt sich

$$\bigcap_{j=2}^{n} B_{\lambda_j} = \left(A_{\lambda_1}^c \cap \bigcap_{j=2}^{n} B_{\lambda_j}\right) \cup \left(A_{\lambda_1} \cap \bigcap_{j=2}^{n} B_{\lambda_j}\right)$$

Für $A \subset B$ gilt $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. Zusammen führt dies zu

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_{\lambda_j}\right) =& \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} B_{\lambda_j} \setminus \left(A_{\lambda_1} \cap \bigcap_{j=2}^{n} B_{\lambda_j}\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} B_{\lambda_j}\right) - \mathbb{P}\left(A_{\lambda_1} \cap \bigcap_{j=2}^{n} B_{\lambda_j}\right) \\ &\overset{I.V.}{=} \prod_{j=2}^{n} \mathbb{P}(B_{\lambda_j}) - \mathbb{P}\left(A_{\lambda_1}\right) \prod_{j=2}^{n} \mathbb{P}(B_{\lambda_j}) = \mathbb{P}(A_{\lambda_1}^c) \prod_{j=2}^{n} \mathbb{P}(B_{\lambda_j}) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_{\lambda_j})\end{aligned}$$

(b) (i)

$$\mathbb{P}\big(A \cap (B \cap C)\big) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\big(\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\big) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C).$$

(ii)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((A \cup B) \cap C\big) &= \mathbb{P}\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) \\ &= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}\big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(C)\big(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\big) \\ &= \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A \cup B).\end{aligned}$$

(iii) $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ und $\sigma(\{B\}) = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$. Wir müssen nur zeigen, dass A und B^c sowie A^c und B sowie A^c und B^c unabhängig sind:

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\big(1 - \mathbb{P}(B)\big) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$$

Die anderen Fälle gehen analog.

$\square$