Übungsblatt 2: Lösungen

Aufgabe 2.1. (mündliche Aufgabe)
Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra über Ω und $F \in \mathcal{F}$. Dann ist

$$F \cap \mathcal{F} = \{F \cap G : G \in \mathcal{F}\}$$

eine σ-Algebra über F. Sie wird als Spur-σ-Algebra bezeichnet. Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine σ-Algebra ist.

Beweis. Es müssen drei Eigenschaften nachgeprüft werde:

1. $F, \emptyset \in F \cap \mathcal{F}$ klar nach Definition.
2. Sei $A \in F \cap \mathcal{F}$. Dann gibt es $B \in \mathcal{F}$ mit $A = F \cap B$.

   $A^c = F \cap A^c = F \cap (F \cap B)^c = F \cap (F^c \cup B^c) = (F \cap F^c) \cup (F \cap B^c) = F \cap B^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

3. Seien $A_1, A_2, ... \in F \cap \mathcal{F}$. Dann gibt es $B_i \in \mathcal{F}$ mit $A_i = F \cap B_i \; \forall i \in \mathbb{N}$.

   $$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (F \cap B_i) = F \cap \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right)$$

   Somit ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, da $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{F}$

□

Aufgabe 2.2. (mündliche Aufgabe)
Die klassische Variante des sogenannten *Ziegenproblems* lautet wie folgt:
In einer Gameshow hat ein Kandidat die Wahl zwischen drei Toren. Hinter einem Tor befindet sich der Hauptgewinn und hinter den anderen beiden jeweils eine Niete in Form einer Ziege. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit bei allen Toren gleich, den Hauptgewinn zu verbergen. Der Kandidat wählt, jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit und unabhängig davon, wo der Hauptgewinn sich befindet, anfangs eines der drei Tore aus. Danach deckt der Moderator, wissentlich, wo sich der Hauptgewinn befindet, mit gleicher Wahrscheinlichkeit eines der nicht von dem Kandidaten ausgewählten Tore, die außerdem eine Ziege verbergen, auf. Dann fragt er den Kandidaten, ob dieser bei seinem gewählten Tor bleiben, oder doch lieber auf das andere wechseln möchte.

(a) Es sei

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{1, 2, 3\}^3 : \; \omega_3 \neq \omega_1 \text{ und } \omega_3 \neq \omega_2\},$$

und $\mathbb{P}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß, das obiger Situation entspricht. ω_1 bezeichnet die Tornummer, hinter der der Hauptgewinn sich befindet, ω_2 die Tornummer, die der Kandidat gewählt hat, und ω_3 die Tornummer, die der Moderator aufgedekt hat. Geben Sie $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ an, wenn $\omega_1 = \omega_2$ und wenn $\omega_1 \neq \omega_2$.

(b) Wie soll sich der Kandidat entscheiden, um seine Gewinnchancen zu maximieren, gegeben, dass er das erste Tor gewählt und der Moderator das zweite Tor aufgedeckt hat?

Beweis. (a) Wenn $\omega_1 = \omega_2$, dann kann ω_3 zwei Werte annehmen, und somit

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}.$$

Wenn $\omega_1 \neq \omega_2$, dann kann ω_3 nur einen Wert annehmen, und somit

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

(b) Da der Moderator das zweite Tor aufgedeckt hat, kann sich der Hauptgewinn nur hinter dem ersten oder dem dritten Tor befinden. Wir berechnen

$$\mathbb{P}\big(\{(1,1,2)\} \,|\, \{(1,1,2),(3,1,2)\}\big) = \frac{\mathbb{P}\big(\{(1,1,2)\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{(1,1,2),(3,1,2)\}\big)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{18}+\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

und

$$\mathbb{P}\big(\{(3,1,2)\} \,|\, \{(1,1,2),(3,1,2)\}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\{(1,1,2)\} \,|\, \{(1,1,2),(3,1,2)\}\big) = \frac{2}{3}.$$

Deshalb soll der Kandidat das dritte Tor wählen. In der Regel soll der Kandidat immer auf das andere Tor wechseln, um seine Gewinnwahrscheinlichkeit zu maximieren.

□

Aufgabe 2.3. (schriftliche Aufgabe: 7 Punkte)
Sie betrachten eine Urne mit $N \in \mathbb{N}$ Kugeln. Die Kugeln sind durchnummeriert, sodass jede Zahl genau einmal vorkommt. n Personen, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n \leq N$ gilt, ziehen nacheinander mit Zurücklegen.

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an.
(1 Punkte)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen die gleiche Zahl ziehen? Geben Sie das Ereignis zusätzlich als Menge an.
(3 Punkte)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen die Kugeln mit der Nummer 1 ziehen, wenn die erste Person Kugel 1 gezogen hat? Geben Sie das Ereignis ebenfalls auch Menge an.
(3 Punkte)

Beweis. (a) $\Omega_n = \{1, ..., N\}^n$, $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega_n|}$ für alle $A \in \mathcal{F}$, wobei $|\Omega_n| = N^n$.

(b) A sei das Ereignis, dass min. zwei Personen die gleiche Zahl ziehen.

$$A = \{\omega \in \Omega_n \mid \exists i, j \in \{1, ..., n\},\ i \neq j : \omega_i = \omega_j\}$$

Um an die Wahrscheinlichkeit zu gelangen, verwenden wir die Gegenwahrscheinlichkeit. Für A^c gilt

$$|A^c| = N \cdot (N-1) \cdot ... \cdot (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Daraus ergibt sich:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega_n|} = 1 - \frac{N!}{(N-n)!N^n}$$

(c) Hie wird nach einer bedingten Wahrscheinlichkeit gefragt.

$$B = \{\omega \in \Omega_n \mid \exists i, j \in \{1, ..., n\}\ , i \neq j\ : \omega_i = \omega_j = 1\},\ C = \{\omega \in \Omega_n\ |\omega_1 = 1\}$$

Gesucht ist nun $\mathbb{P}(B|C)$. Dies lässt sich über das Gegenereignis bestimmen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \mid C) =& 1 - \mathbb{P}(B^c \mid C) = 1 - \frac{\mathbb{P}(B^c \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = 1 - \frac{|B^c \cap C|}{|\Omega_n|}\left(\frac{|C|}{|\Omega_n|}\right)^{-1} \\ =& 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

wobei $|B^c \cap C| = (N-1)^{n-1}$ und $|C| = N^{n-1}$ verwendet wurde.

Bem.: Für $N = 365$ erhält man das bekannte Geburtstagsparadoxon. Paradox daran ist, dass man intuitiv vermutet, dass das Ereignis A für z. B. $n = 23$ Personen relativ unwahrscheinlich ist. Tatsächlich kann man mit der (b) zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "mindestens zwei Personen von 23 haben am gleichen Tag Geburtstag"größer als 50% ist. $\square$

Aufgabe 2.4. (schriftliche Aufgabe: 13 Punkte)
Sie drehen ein Glücksrad, welches in m gleich große Kreissegmente eingeteilt und nummeriert wurde, wobei $m \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigt das Glücksrad eine Zahl $n \in \{1, \ldots, m\}$ an, so dürfen Sie einen Würfel n mal werfen. Innerhalb dieser Würfe sollen Sie mindestens eine 1 werfen, denn dann gewinnen Sie einen Zoo-Gutschein.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Kreissegment mit der Zahl $n \in \{1, \ldots, m\}$ zu erhalten, und die bedingte Wahrscheinlichkeit, den Zoo-Gutschein zu gewinnen, gegeben, dass man das Kreissegment mit der Zahl $n \in \{1, \ldots, m\}$ gezogen hat.
(3 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den Zoo-Gutschein gewinnen.
(3 Punkte)

Sie haben nun zusätzlich die Möglichkeit, beim Erhalten des Kreissegments mit der Zahl 1 und anschließendem würfeln einer ungeraden Zahl einen Eis-Gutschein zu gewinnen.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, *irgendetwas* zu gewinnen?
(3 Punkte)

(d) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, das Kreissegment mit Zahl n gezogen zu haben, bedingt darauf, irgendetwas gewonnen zu haben?
(4 Punkte)

Beweis. (a) Wir nehmen

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{m} \Omega_n, \text{ mit } \Omega_n = \{(\omega_n^1, \dots, \omega_n^n) : \ \omega_n^i \in \{1, \dots, 6\}\}.$$

an und wir definieren das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, 2^\Omega)$ durch

$$\mathbb{P}\big(\{(\omega_n^1, \dots, \omega_n^n)\}\big) = \frac{1}{m \times 6^n} \text{ für alle } n \in \{1, ..., m\} \text{ und } (\omega_n^1, \dots, \omega_n^n) \in \Omega_n.$$

Dann gilt für alle $n \in \{1, ..., m\}$

$$\mathbb{P}(\Omega_n) = \sum_{(\omega_n^1, \dots, \omega_n^n) \in \Omega_n} \frac{1}{m \times 6^n} = \frac{1}{m}$$

und

$$\mathbb{P}\big(\{(\omega_n^1, \dots, \omega_n^n)\} \,|\, \Omega_n\big) = \frac{\frac{1}{m \times 6^n}}{\frac{1}{m}} = \frac{1}{6^n} \text{ für alle } (\omega_n^1, \dots, \omega_n^n) \in \Omega_n,$$

und somit ist $\mathbb{P}(\,\cdot \,|\, \Omega_n)$ das Laplace Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω_n. Wir definieren auch

$$\Omega_n^i(A) = \{(\omega_n^1, \dots, \omega_n^n) \in \Omega_n : \ \omega_n^i \in A\} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\} \text{ und } A \subset \{1, \dots, 6\}.$$

und berechnen

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_n^i(\{1\}) \,\middle|\, \Omega_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \Omega_n^i(\{2, \dots, 6\}) \middle| \Omega_n\right) = 1 - \frac{5^n}{6^n}.$$

(b) Es sei B das Ereignis, dass Sie den Zoo-Gutschein gewinnen. Wir benutzen die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(B \,|\, \Omega_n)\mathbb{P}(\Omega_n) = \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_n^i(\{1\}) \,\middle|\, \Omega_n\right) \mathbb{P}(\Omega_n) \\
&= 1 - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \frac{1}{m} \times \frac{5}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^m}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \frac{5}{m}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^m\right).
\end{aligned}$$

(c) Es sei C das Ereignis, einen Eis-Gutschein zu gewinnen.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cup C) &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &= 1 - \frac{5}{m}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^m\right) + \frac{3}{m \times 6} - \frac{1}{m \times 6} = 1 - \frac{5}{m}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^m\right) + \frac{1}{3m}.\end{aligned}$$

(d) Wir benutzen den Satz von Bayes.
Für alle $n \in \{2, \ldots, m\}$

$$\mathbb{P}(\Omega_n \,|\, B \cup C) = \frac{\mathbb{P}(B \cup C \,|\, \Omega_n)\mathbb{P}(\Omega_n)}{\mathbb{P}(B \cup C)} = \frac{\mathbb{P}(B \,|\, \Omega_n)\mathbb{P}(\Omega_n)}{\mathbb{P}(B \cup C)} = \frac{\frac{1}{m}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)}{1 - \frac{5}{m}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^m\right) + \frac{1}{3m}}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega_1 \,|\, B \cup C) &= \frac{\mathbb{P}(B \cup C \,|\, \Omega_1)\mathbb{P}(\Omega_1)}{\mathbb{P}(B \cup C)} = \frac{\mathbb{P}(\Omega_1^i(\{1,3,5\}) \,|\, \Omega_1)\mathbb{P}(\Omega_1)}{\mathbb{P}(B \cup C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2m}}{1 - \frac{5}{m}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^m\right) + \frac{1}{3m}}.\end{aligned}$$

$\square$