Übungsblatt 10: Lösungen

Alle Zufallsvariablen sind auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert.

Aufgabe 10.1. (mündliche Aufgabe)
Finden Sie Gegenbeispiele, sodass klar wird, dass die Umkehrungen in Theorem 1.13.1 a)-c) nicht gelten.

Beweis. (i) Zu $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X \;\not\Rightarrow X_n \overset{L^p}{\to} X$:
Betrachte $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen $\mathbb{P}(X_n = e^n) = e^{-n} = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Sei $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n = e^n) = e^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Andererseits gilt

$$\mathbb{E}(|X_n|) = e^n e^{-n} = 1$$

(ii) Zu $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X \;\not\Rightarrow X_n \overset{a.s.}{\to} X$:
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_i \sim Ber_{\frac{1}{i}}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gilt

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Andererseits gilt, da $\{X_n = 1\}$ unabhängige Ereignisse für alle $n \in \mathbb{N}$ sind, mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \;,$$

dass $\{X_n = 1\}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ eintritt. Daher kann X_n nicht fast sicher gegen 0 konvergieren.

(iii) Zu $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X \;\not\Rightarrow X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$:
Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Betrachte $X_n := -X$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|-X - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(2|X| > \varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0$$

Wir haben also $X_n \overset{\mathbb{P}}{\not\to} X$. Des Weiteren wissen wir, dass für $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(-X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq -x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

wobei im letzten Schritt die Symmetrie der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung genutzt wurde. Es gilt also $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$.

(iv) Zu $X_n \overset{L^p}{\to} X \;\not\Rightarrow X_n \overset{L^q}{\to} X$ für $0 < p < q < \infty$:
Es sei $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$ und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. In 8.1. b) sahen wir, dass X_n in $\mathcal{L}^1$ konvergiert, aber nicht in $\mathcal{L}^2$.

$\square$

Aufgabe 10.2. (mündliche Aufgabe)
Auf einem Musikfestival gibt es 960 Limonadeflaschen für 900 Teilnehmer. Jeder Teilnehmer möchte eine unabhängige und zufällige Anzahl von Flaschen, die Poi_1-verteilt ist, trinken. Es sei S_{900} die Gesamtanzahl an Flaschen, die benötigt werden, um alle Teilnehmer zu versorgen. Sie wollen wissen, ob Sie genug Flaschen haben, das heißt, ob $S_{900} \leq 960$ gilt.

(a) Es sei X eine Poi_ν-verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X(X-1)]$ und zeigen Sie $\mathrm{Var}(X) = \nu$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Chebyscheffschen Ungleichung, dass $\mathbb{P}(S_{900} \leq 960) \geq \frac{3}{4}$. Berechnen Sie zudem $\mathbb{P}(S_{900} \leq 960)$ bis auf 5 Nachkommastellen genau. Nutzen Sie hierfür einen Computer.

(c) Geben Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes eine Approximation für $\mathbb{P}(S_{900} \leq 960)$ an. Vergleichen Sie mit b).

Beweis. (a) Es gilt

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\nu}\frac{\nu^k}{k!} = e^{-\nu}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\nu^k}{(k-2)!} = \nu^2 e^{-\nu}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\nu^p}{p!} = \nu^2,$$

wobei $p = k-2$ substituiert wurde. Damit kann nun die Varianz bestimmt werden:

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) + \nu^2 - \nu,$$

Somit erhalten wir $\mathrm{Var}(X) = \nu$.

(b) Es sei $(X_i)_{i\in\{1,\dots,900\}}$ eine u.i.v. Familie von Poi_1-verteilten Zufallsvariablen, die angeben, wie viele Flaschen jeder Teilnehmer trinken möchte, und $S_{900} = \sum_{i=1}^{900} X_i$. Nach der Chebyscheffschen Ungleichung gilt

$$\mathbb{P}(S_{900} > 960) \leq \mathbb{P}\left(|S_{900} - 900| \geq 60\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_{900})}{60^2} = \frac{\sum_{i=1}^{900}\mathrm{Var}(X_i)}{60^2} = \frac{900}{60^2} = \frac{1}{4},$$

und somit

$$\mathbb{P}(S_{900} \leq 960) = 1 - \mathbb{P}(S_{900} > 960) \geq \frac{3}{4}.$$

Wenn X und Y unabhängige und Poi_{ν_1} bzw. Poi_{ν_2}-verteilte Zufallsvariablen sind, ist nach der Vorlesung $X+Y$ $\mathrm{Poi}_{\nu_1+\nu_2}$-verteilt. Deswegen kann man durch Induktion zeigen, dass S_{900} Poi_{900}-verteilt ist. Man kann dann z.B die Website *https://keisan.casio.com/exec/system/1180573180* verwenden, sodass wir

$$\mathbb{P}(S_{900} \leq 960) \approx 0,97726.$$

(c) Es sei Φ die Verteilungsfunktion einer $\mathcal{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariable. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\mathbb{P}(S_{900} \leq 960) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{900}(X_i - 1)}{\sqrt{900}} \leq 2\right) \approx \Phi\left(2\right).$$

Unter Verwendung der Tabelle zur Standardnormalverteilung (siehe beispielsweise *https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table*) erhält man näherungsweise:

$$\mathbb{P}(S_{900} \leq 960) \approx F(2) \approx 0.97725.$$

Diese Approximation mit dem Zentralen Grenzwertsazt ist daher sehr gut. Es ist unwahrscheinlich, dass sie nicht genug Flaschen haben. Wenn Sie nur die Schranke benutzen würden, welche die Chebyscheffsche Ungleichung liefert, würde der Verdacht aufkommen, dass Sie vielleicht nicht genug Flaschen haben (mit Wahrscheinlichkeit 0.25). Dies ist jedoch dem Umstand geschuldet, dass diese Schranke nicht gut ist.

$\square$

Aufgabe 10.3. (schriftliche Aufgabe: 10 Punkte)
Betrachten Sie die einfache Irrfahrt aus Def. 1.14.1. Beweisen Sie die Aussage aus 1.14.2. Zu zeigen ist also, dass die Abbildung

$$\mathbb{Z} \ni m \mapsto \mathbb{P}(S_{2n} = m)$$

für $m = 0$ maximiert wird. Berechnen Sie hierzu $\mathbb{P}(S_{2n} = m)$ explizit $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{Z}$. Man bemerke zunächst,dass S_n nur in einer geraden Anzahl an Schritten eine gerade Zahl annehmen kann. Des Weiteren kann S_n nur ungerade Werte in einer ungeraden Anzahl an Schritten erreichen. Betrachte nun $n \in \mathbb{N}$ fest und gerade und $m \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. S_n kann m nur annehmen, wenn die $X_1, ..., X_n$ insgesamt $\frac{n+m}{2}$-mal die 1 und $\frac{n-m}{2}$-mal die -1 annehmen, denn

$$1 \cdot \frac{n+m}{2} + (-1) \cdot \frac{n-m}{2} = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m$$

Da $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = -1) = \frac{1}{2}\ \forall j \in \{1, ..., n\}$ gibt es $\binom{n}{\frac{n+m}{2}}$ Möglichkeiten um die 1 auf die $X_1, ..., X_n$ zu verteilen. Jede mögliche Realisierung der Folge $X_1, ..., X_n$ kann mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^n}$ auftreten. Wir erhalten

$$\mathbb{P}(S_n = m) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} \frac{1}{2^n}$$

für $n + m \in \{0, 2, 4, ..., 2n\}$ und 0 sonst. Wegen $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = -1) = \frac{1}{2}$ ergibt sich $\mathbb{P}(S_n = m) = \mathbb{P}(S_n = -m)$. Wir wollen nun zeigen, dass $\binom{n}{\frac{n+m}{2}} \frac{1}{2^n}$ sein Maximum in $m = 0$ annimmt.

$$\binom{n}{\frac{n+m}{2}} \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n-m}{2}\right)!} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{2^n} \frac{1}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n-m}{2}\right)!}$$

Wir betrachten nun $\frac{1}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n-m}{2}\right)!}$, da $\frac{n!}{2^n}$ lediglich ein Vorfaktor ist. Sei nun OBdA $m \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n-m}{2}\right)!} &= \left(\frac{1}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!}\right)^2 \cdot \prod_{k=1}^{2m} \frac{1}{\frac{n-m+k}{2}} \leq \left(\frac{1}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!}\right)^2 \cdot \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{\frac{n-m+k}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n-0}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n-0}{2}\right)!}\end{aligned}$$

Für den Fall $m < 0$ geht die Abschätzung analog, da $\frac{1}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n-m}{2}\right)!}$ symmetrisch in m ist. $\square$

Aufgabe 10.4. (schriftliche Aufgabe: 10 Punkte)
$(X_n)_{n\geq 2}$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen. Für diese soll

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n \cdot \log(n)} = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$$

gelten. Zeigen Sie nun, dass die Folge dem schwachen, aber nicht dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt. Es soll also gezeigt werden, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, jedoch nicht fast sicher.
Hinweis: Die zweite Aussage kann mit Widerspruchsannahme gezeigt werden. Hierfür kann $Y_n := X_n - \mathbb{E}[X_n]$ weiterhelfen.

Beweis. (i) Zum schwachen Gesetz der großen Zahlen:
Es gilt

$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{\log(n)} \text{ und } \mathrm{Var}(X_n) = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}[X_n] = \frac{n}{\log(n)} - \frac{1}{\log(n)^2} = \frac{n \cdot \log(n) - 1}{\log(n)^2}$$

Man sieht, dass $\mathrm{Var}(X_n)$ monoton wachsend in n ist. Sei nun $S_n := \sum_{k=2}^{n} X_k$.
Da die $(X_n)_{n\geq 2}$ unabhängig sind, erhalten wir

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{Var}(X_k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k \cdot \log(k) - 1}{\log(k)^2}$$

Somit ergibt sich

$$Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n)) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n} \frac{k \cdot \log(k) - 1}{\log(k)^2} \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n \cdot \log(n) - 1)}{\log(n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Mit Chebyshev folgt nun

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=2}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right| \geq \varepsilon n\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Die Folge genügt somit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

(ii) Zum starken Gesetz der großen Zahlen:
Angenommen die Folge genügt dem starken Gesetz der großen Zahlen. Es gilt also

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i]) = 0\right) = 1$$

Sei $Y_n := X_n - \mathbb{E}[X_n]$. Dann gilt $\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} Y_i$ konvergiert ebenfalls fast sicher gegen 0. Zusätzlich gilt auch $\frac{Y_n}{n}$ konvergiert fast sicher gegen 0, denn

$$\frac{Y_n}{n} = \frac{\sum_{i=2}^{n} Y_i}{n} - \frac{\sum_{i=2}^{n-1} Y_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} Y_i - \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n-1} Y_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Definiere des Weiteren $A_n := \{\omega \in \Omega | \frac{|Y_n(\omega)|}{n} \geq \frac{1}{2}\}$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log(n)} = \infty \ (*)$$

Da die A_n nach Definition unabhängig sind, folgt mit dem Lemma von Borel-Cantelli:

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega | \frac{|Y_n(\omega)|}{\omega} \geq \frac{1}{2} \text{für unendlich viele n}\right\}\right) = 1$$

Somit kann $\frac{Y_n}{n}$ nicht $\mathbb{P}$-fast sicher gegen 0 konvergieren und die Folge genügt nicht dem starken Gesetz der großen Zahlen.
Zu zeigen ist nun, dass $(*)$ gilt. Sei $u(x) = \log(\log(x))$. Die Ableitung ist gegeben durch $u'(x) = \frac{1}{\log(x)} \frac{1}{x}$. Mit dem Mittelwertsatz gibt es ein $\delta \in (0, 1)$, sodass

$$\log(\log(n+1)) - \log(\log(n)) = \frac{1}{\log(n+\delta)} \frac{1}{n+\delta} \leq \frac{1}{n \cdot \log(n)}.$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log(n)} \geq \sum_{n=2}^{\infty} [\log(\log(n+1)) - \log(\log(n))] = \infty,$$

denn

$$\sum_{n=2}^{m} [\log(\log(n+1)) - \log(\log(n))] = \log(\log(m+1)) - \log(\log(2)) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$\square$