Übungsblatt 1: Lösungen

Aufgabe 1.1. (mündliche Aufgabe)
Gegeben sei ein Pokerkartenspiel mit 52 Karten (die Zahlen 2 bis 10, sowie Bube, Dame, König und Ass, jeweils in den Farben $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$ und $\spadesuit$). Es werden zufällig n, $n \leq 52$, Karten ohne Zurücklegen gezogen.

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ aller möglichen Elementarereignisse an.

(b) Geben Sie jeweils für die Mengen

$$A := \{\text{Keine '7' nach dreimaligem Ziehen}\} \in \mathcal{F}_3 \text{ und}$$
$$B := \{\text{mindestens einmal } \spadesuit \text{ oder } \clubsuit \text{ nach viermaligem Ziehen}\} \in \mathcal{F}_4$$

die Wahrscheinlichkeit an.

Beweis. (a) Wir wählen

$$\Omega_n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \ \omega_i \in \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \times \{2, \dots, 10, \text{B,D,K,A}\}, \ \omega_i \neq \omega_j, i \neq j\}$$

$\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$ und $\mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega_n|}$ für $A \in 2^{\Omega_n}$. Wir haben ferner

$$|\Omega_n| = 52 \cdot 51 \cdots (52 - n + 1) = 52!/(52 - n)!.$$

(b) Zuerst betrachten wir A. Wir haben $n = 3$ und erhalten

$$A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \notin \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \times \{7\} \ \forall i\}.$$

Damit gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega_3|} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{52 \cdot 51 \cdot 50}.$$

Jetzt betrachten wir B. Wir haben $n = 4$ und erhalten

$$B^c = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \notin \{\clubsuit, \spadesuit\} \times \{2, \dots, 10, \text{B,D,K,A}\} \ \forall i\}.$$

Damit gilt

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \frac{|B^c|}{|\Omega_4|} = 1 - \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}.$$

$\square$

Besprecht vor Aufgabe 1.2 bitte den Satz von De Morgan.

Aufgabe 1.2. (mündliche Aufgabe)
Es sei $\Omega = [0,1]$. Zeigen Sie, dass

(a) $\mathcal{F}_1 = \{A \in 2^\Omega : \; A \text{ offen}\}$ keine σ-Algebra ist,

(b) $\mathcal{F}_2 = \{A \in 2^\Omega : \; A \text{ offen oder abgeschlossen}\}$ keine σ-Algebra ist,

(c) $\mathcal{F}_3 = \{A \in 2^\Omega : \; A \text{ oder } \Omega \setminus A \text{ ist abzählbar}\}$ eine σ-Algebra ist.

Beweis. (a) $A = (0,1)$ ist offen aber $A^c = \{0,1\}$ nicht.

(b) $A_1 = (0, \frac{1}{3}) \in \mathcal{F}_2$ und $A_2 = [\frac{2}{3}, 1] \in \mathcal{F}_2$ aber $A_1 \cup A_2$ nicht.

(c)
- $\Omega \in \mathcal{F}_3$ weil $\Omega \setminus \Omega = \emptyset$ abzählbar ist.
- Es sei $A \in \mathcal{F}_3$, dann ist $\Omega \setminus A^c = A$ oder $A^c = \Omega \setminus A$ abzählbar, und somit $A^c \in \mathcal{F}_3$.
- Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_3^{\mathbb{N}}$, $I = \{n \in \mathbb{N} : \; A_n \text{ ist abzählbar}\}$ und $J = \mathbb{N} \setminus I$. Wenn $J = \emptyset$, dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar, sonst ist
$$\Omega \setminus \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \Big(\bigcap_{j\in J} (\Omega \setminus A_j)\Big) \cap \Big(\Omega \setminus \bigcup_{i\in I} A_i\Big)$$
abzählbar, dann gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_3$.

$\square$

Beispiele zu $\mathcal{A}$ ist eine Algebra, aber keine σ-Algebra:

1. Sei $\Omega = [0,\infty)$ und $\mathcal{B} := \{[a,b) | a,b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, a \neq b\} \cup \{[a,\infty) | 0 \leq a < \infty\}$. Die Menge
$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n B_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, B_i \in \mathcal{B} \right\}$$
ist eine Algebra, aber keine σ-Algebra, da
$$A_n := \left[\frac{1}{n}, \infty\right) \in \mathcal{A}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$
aber
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,\infty) \notin \mathcal{A}.$$
Die Eigenschaften der Algebra können als Übung selbst nachgerechnet werden.

2. Betrachte $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} = A \subseteq \Omega | \text{A endlich oder } A^c \text{ endlich}$. $\mathcal{A}$ ist eine Algebra, aber keine σ-Algebra, da

$$A_n := \{2n\} \in \mathcal{A},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

aber

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ und } \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$$

sind nicht endlich. Die Eigenschaften der Algebra können als Übung selbst nachgerechnet werden.

Aufgabe 1.3. (schriftliche Aufgabe: 10 Punkte)
Ein Skat-Deck (32 Karten) wird gründlich gemischt. Im Anschluss werden nacheinander die obersten zehn Karten vom Stapel gezogen.

(a) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ an, der das Zufallsexperiment beschreibt.
(3 Punkte)

(b) Beschreiben Sie die Ereignisse

$$\begin{aligned}
A_i &= \{\text{Die } i\text{-te gezogene Karte ist ein Bube}\}\ \forall i = 1, \dots, 10,\\
A &= \{\text{Es wird mindestens ein Bube gezogen}\},\\
B &= \{\text{Die erste und die letzte gezogene Karte sind Buben}\}.
\end{aligned}$$

(3 Punkte)

(c) Geben Sie jeweils die kleinste σ-Algebra an, die

(i) $\{A_1\}$ enthält,

(ii) $\{A_1 \cup A_2\}$ enthält,

(iii) $\{A_1, A_2\}$ enthält.

(4 Punkte)

Beweis. Zu (a): Wir identifizieren die 32 Spielkarten mit den Zahlen $1, \dots, 32$. Eine Möglichkeit dies zu tun, ist es die Zahlen $1, \dots 8$, mit Karo, $9, \dots, 16$, mit Herz, $17, \dots, 24$ mit Pik und $25, \dots 32$ mit Kreuz zu identifizieren. Innerhalb der Farben, sortieren wir die Karten aufsteigend von 7 nach Ass. Dann ist 5 der Karobube, 13 der Herzbube, 21 der Pikbube und 29 der Kreuzbube. Da wir (nach gründlichem Mischen) nacheinander die obersten 10 Karten ziehen, aber keine Karte doppelt ziehen können, bietet sich als Ereignisraum Ω an,

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{10}) : \omega_1 \in \{1, \dots, 32\}; \omega_i \in \{1, \dots, 32\} \backslash \{\omega_1, \dots, \omega_{i-1}\}, i = 2, \dots, 10\}\,.$$

Als σ-Algebra (die Menge aller zulässigen Ereignisse) können wir hier die Potenzmenge $\mathscr{P}(\Omega)$ wählen, da der Ereignisraum endlich ist. Ferner gehen wir davon aus, dass gründlich gemischt wird und damit jede Mögliche Anordnung der Karten im Stapel gleichwahrscheinlich ist. Wir wählen daher das WahrscheinlichkeitsmaSS P, das durch $\mathbb{P}(\{\omega\}) = |\Omega|^{-1}$ festgelegt wird (auch hier wieder möglich, da Ω endlich).

Zu (b): Nach unserer Konstruktion von Ω bestehen die Elemente von Ω aus Tupeln, der Länge 10, in denen der j-te Eintrag zeigt, welche Karte im j-ten Zug gezogen wurde. Das Ereignis A_i tritt ein, wenn wir im i-ten Zug einen Buben ziehen, d.h., wenn im i-ten Eintrag eine $5, 13, 21, 29$ steht. Damit ergibt sich

$$A_i = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{10}) : \omega \in \Omega \text{ und } \omega_i \in \{5, 13, 21, 29\}\}.$$

Mindestens einen Buben ziehen wir, wenn wir entweder im ersten oder im zweiten oder auch erst im zehnten Zug einen Buben ziehen. Es gilt also

$$A = \bigcup_{i=1}^{10} A_i.$$

Das Ereignis B tritt ein, wenn wir im ersten und letzten Zug einen Buben ziehen, d.h., wenn sowohl A_1 also auch A_{10} eintritt. Damit $B = A_1 \cap A_{10}$.

Zu (c): (i) Damit ein Mengensystem $\mathscr{A}_{(i)}$ eine σ-Algebra ist, muss es mindestens die Elemente $\emptyset, \Omega$ enthalten. Außerdem soll $\mathscr{A}_{(i)}$ ebenfalls die Menge A_1 enthalten. Nach Eigenschaft 2 muss dann aber auch A_1^c ein Element von $\mathscr{A}_{(i)}$ sein. Damit ist $\mathscr{A}_{(i)} \supset \{\emptyset, A_1, A_1^c, \Omega\}$. Nun ist aber leicht zu sehen, dass dies bereits eine σ-Algebra definiert, womit die kleinste σ-Algebra, die A_1 enthält, gefunden ist.

(ii) Schreiben wir $C = A_1 \cup A_2$ mit $C^c = A_1^c \cap A_2^c$, dann folgt mit gleicher Überlegung, dass die gesuchte σ-Algebra gegeben ist durch

$$\mathscr{A}_{(ii)} = \{\emptyset, C, C^c, \Omega\} = \{\emptyset, A_1 \cup A_2, A_1^c \cap A_2^c, \Omega\}.$$

(iii) Wieder muss $\mathscr{A}_{(iii)}$ mindestens die Elemente $\emptyset, \Omega$ und nach Forderung auch A_1, A_2 enthalten. Mit Eigenschaft 2. muss also gelten $\mathscr{A}_{(iii)} \supset \{\emptyset, A_1, A_1^c, A_2, A_2^c, \Omega\}$. Nun muss aber auch Eigenschaft 3. erfüllt sein. Da für jedes Ereignis E gilt $E \cup \emptyset = E$, $E \cup \Omega = \Omega$ und $E \cup E^c = \Omega$, müssen noch $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cup A_2^c$, $A_1^c \cup A_2$ und $A_1^c \cup A_2^c$ hinzugefügt werden. Zudem müssen noch die jeweiligen Komplemente zu $\mathscr{A}_{(iii)}$ hinzugefügt werden, um Eigenschaft 2 zu erhalten. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned}&(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c, (A_1 \cup A_2^c)^c = A_1^c \cap A_2, (A_1^c \cup A_2)^c = A_1 \cap A_2^c,\\ &(A_1^c \cup A_2^c)^c = A_1 \cap A_2.\end{aligned}$$

Es muss also mindestens gelten

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{(iii)} \supset \{&\emptyset, A_1, A_1^c, A_2, A_2^c, A_1 \cup A_2, A_1^c \cap A_2^c, A_1 \cup A_2^c, A_1^c \cap A_2,\\ &A_1^c \cup A_2, A_1 \cap A_2^c, A_1^c \cup A_2^c, A_1 \cap A_2, \Omega\}.\end{aligned}$$

Wir müssen nun allerdings wieder prüfen, ob Eigenschaft 3. noch immer erfüllt ist. Dazu

$$\begin{aligned}A_1 \cup (A_1^c \cap A_2^c) &= (A_1 \cup A_1^c) \cap (A_1 \cup A_2^c) = A_1 \cup A_2^c \in \mathscr{A}_{(iii)},\\ A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) &= (A_1 \cup A_1^c) \cap (A_1 \cup A_2) = A_1 \cup A_2 \in \mathscr{A}_{(iii)},\\ A_1 \cup (A_1 \cap A_2^c) &= (A_1 \cup A_1) \cap (A_1 \cup A_2^c) = A_1 \in \mathscr{A}_{(iii)},\\ A_1 \cup (A_1 \cap A_2) &= (A_1 \cup A_1) \cap (A_1 \cup A_2) = A_1 \in \mathscr{A}_{(iii)}.\end{aligned}$$

Durch eine analoge Prüfung mit A_1^c, A_2, A_2^c erhalten wir, dass die dritte Eigenschaft tatsächlich immer erfüllt ist und die kleinste σ-Algebra, die A_1 und A_2 enthält, gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{(iii)} = \{&\emptyset, A_1, A_1^c, A_2, A_2^c, A_1 \cup A_2, A_1^c \cap A_2^c, A_1 \cup A_2^c, A_1^c \cap A_2,\\ &A_1^c \cup A_2, A_1 \cap A_2^c, A_1^c \cup A_2^c, A_1 \cap A_2,\\ &(A_1^c \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap A_2), (A_1 \cup A_2) \cap (A_1^c \cup A_2^c), \Omega\}.\end{aligned}$$

Anmerkung: Wozu das ganze? Auch wenn das Finden/Konstruieren von $\mathscr{A}_{(iii)}$ mühselig war, ist $\mathscr{A}_{(iii)}$ immer noch deutlich kleiner als $\mathscr{P}(\Omega)$ mit ihren $2^{|\Omega|}$ Elementen. Die Potenzmenge enthält alle irgendwie möglichen Ereignisse, die eintreten können. Anders gesagt, alle Informationen über das zufälligen Ziehen der ersten 10 Karten sind in $\mathscr{P}(\Omega)$ enthalten. Vielleicht interessieren uns aber nur die ersten zwei Züge und ob wir dabei Buben ziehen. Dann beschreiben wir mit $\mathscr{P}(\Omega)$ viel mehr, als wir eigentlich brauchen, denn alle für uns nötigen Informationen sind bereits in $\mathscr{A}_{(iii)}$ enthalten. $\square$

Aufgabe 1.4. (schriftliche Aufgabe: 10 Punkte)
Beweise folgende Aussagen:

(a) Für eine beliebige Menge Ω gilt folgende Identität:

$$\sigma\left(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}\right) = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$$

Bem.: Mit $\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$ ist die Teilmenge der Potenzmenge gemeint, welche nur die Elementarereignisse von Ω enthält.
(4 Punkte)

(b) Für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ und $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ mit $A, B \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$$

Finden Sie zusätzlich einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und Mengen $A, B \in \mathcal{F}$, welche die Grenzen in der Ungleichung erreichen.
(6 Punkte)

Beweis. (a) Wegen Aufgabe 1.2.c) ist $\{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ eine σ-Algebra, weshalb $\sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}) \subset \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ gilt.
Sei nun $A \in \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$. Wenn A abzählbar ist, dann gilt

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\} \in \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}),$$

weil A abzählbar ist, und wenn A^c abzählbar ist, dann ist $A^c \in \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\})$, und somit $A \in \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\})$.

(b) *untere Schranke:*

$$\begin{aligned} && 1 &\geq \mathbb{P}(A \cup B) \\ \Leftrightarrow && 1 &\geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ \Leftrightarrow && \mathbb{P}(A \cap B) &\geq -1 + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

obere Schranke: Mit $A \cap B \subseteq B$ folgt aus der Monotonie vom Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$$

Mögliches Beispiel: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 12\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ sei das Wahrscheinlichkeitsmaß der Laplace-Verteilung.
Betrachtet man nun die Ereignisse $A_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $B_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = A_1$ und $B_2 = \{9, 10, 11, 12\}$, so kann man nachrechnen, dass A_1 und B_1 die obere Schranke der Ungleichung erreichen und die anderen beiden die untere Schranke.

$\square$