

Zufallsvariablen und spezielle Verteilungen

Aufgabe 1

Entscheiden Sie für die nachfolgenden Funktionen, ob diese die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeits-/Dichte- bzw. Verteilungsfunktion besitzen.

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_2(x) = e^x \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

$$g_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{9}x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

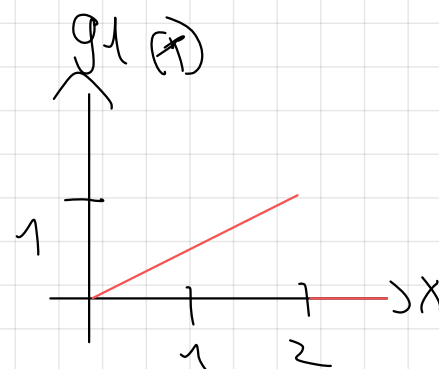
$$g_4(x) = \begin{cases} \frac{x}{28} & \text{für } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g_6(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2

$$\rightarrow g_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$\rightarrow$ Verteilungsfunktion: $\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) \neq 1$

$\rightarrow$ stetige Zufallsvariable

$\rightarrow$ Dichtefunktion

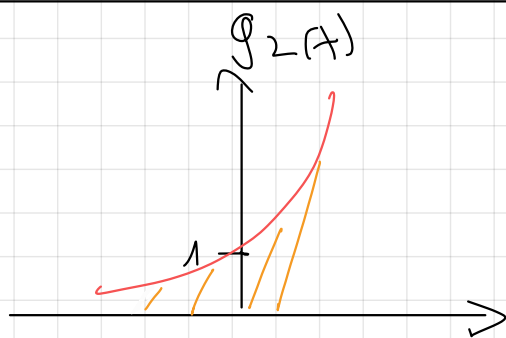
$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 1 \quad \checkmark$$

$$g_1(x) \geq 0 \quad \forall x \quad \checkmark$$

$\hookrightarrow g_1$ ist eine Dichtefunktion

$$g_2(x) = e^x \text{ für } x \in \mathbb{R}$$



$\rightarrow$ Verteilungsfunktion
 $\lim_{x \rightarrow \infty} g_2(x) \neq 1$

$\rightarrow$ stetige Zufallsvariable

$\rightarrow$ Dichtefunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) dx = 1$$

$\hookrightarrow g_2$ ist weder Dichte- noch Verteilungsfunktion

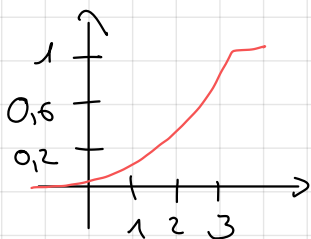
Es kann sich auch nicht um eine Wahrscheinlichkeitsfunktion handeln, da g_2 stetig ist

$$g_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{9}x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_3(x) = 1 \quad \checkmark$$

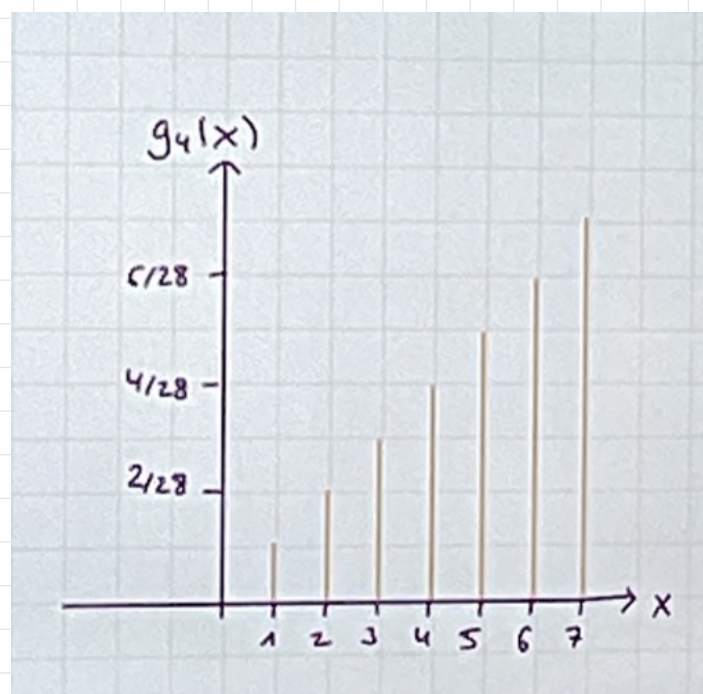
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g_3(x) = 0 \quad \checkmark$$



g_3 ist monotonwachsend & rechtsstetig

$\hookrightarrow g_3$ ist eine Verteilungsfunktion

$$g_4(x) = \begin{cases} \frac{x}{28} & \text{für } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$\rightarrow$ Verteilungsfunktion: $\lim_{x \rightarrow \infty} g_4(x) \neq 1$

$\hookrightarrow$ diskrete Zufallsvariable

$\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\sum_{x=1}^7 \frac{x}{28} = \frac{1}{28} + \frac{2}{28} + \frac{3}{28} + \frac{4}{28} + \frac{5}{28} + \frac{6}{28} + \frac{7}{28} = 1$$

$$g_4(x) \geq 0 \quad \forall x$$

$\hookrightarrow g_4$ ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$g_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



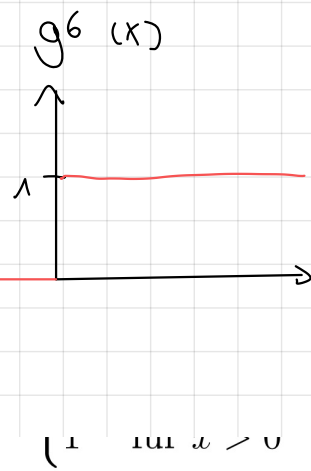
Verteilungsfunktion

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_5(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g_5(x) = 0$$

g_5 ist monoton wachsend & rechtsstetig
 g_5 ist eine Verteilungsfunktion

$$g_6(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



→ g_6 ist nicht rechtsstetig
→ keine Verteilungsfunktion

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit nachfolgender Dichtefunktion:

$$f_X(x) := \begin{cases} 0,1x & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 2 - 0,4x & \text{für } 4 < x \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz.

a) → Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

$$f \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$F_X(x) = \int_0^x 0,1y dy \rightarrow [0,05]$$

auflösen

$$= \left[\frac{0,1}{2} y^2 \right]_0^x = \frac{0,1}{2} \cdot x^2 - \frac{0,1}{2} \cdot 0^2 = 0,05x^2$$

= $0,05x^2$ (Fläche unterhalb Dichtefunktion für $4 < x \leq 5$)

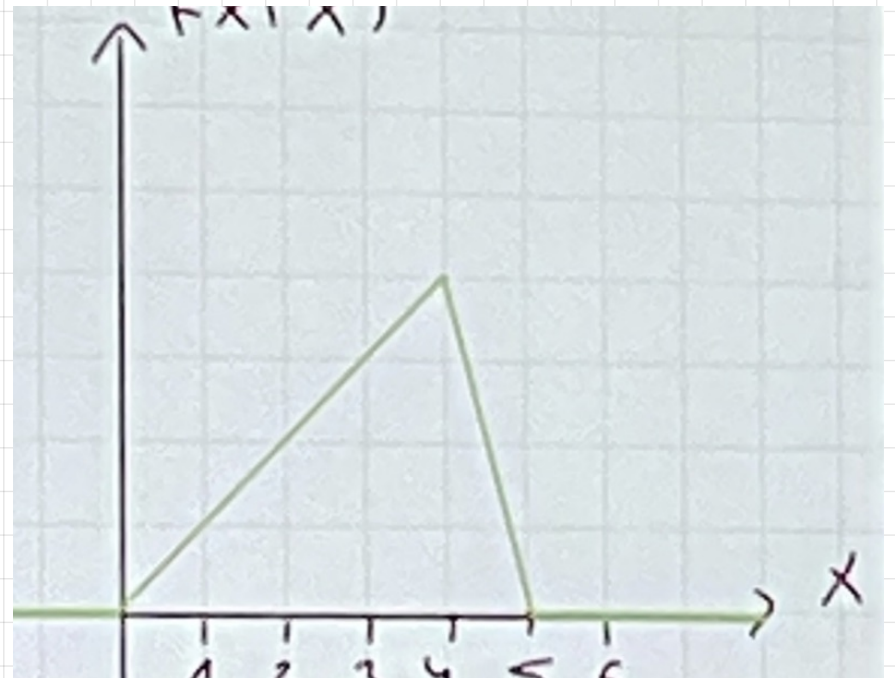
$$F_X(x) = \int_0^4 0,1x dx + \int_4^x 2 - 0,4y dy$$

$$= \left[\frac{0,1}{2} x^2 \right]_0^4 + \left[2y - 0,4 \frac{y^2}{2} \right]_4^x$$

$$= \frac{0,1}{2} \cdot 4^2 - 0 + \left(2x - 0,4 \frac{x^2}{2} - \left(2 \cdot 4 - 0,4 \cdot \frac{4^2}{2} \right) \right)$$

$$= 0,8 + (2x - 0,2x^2 - (8 - 3,2))$$

$$= -0,2x^2 + 2x - 4$$



Damit ist die Verteilungsfunktion für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 0,05 \cdot x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ -0,2 \cdot x^2 + 2x - 4 & \text{für } 4 < x \leq 5 \\ 1 & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

Aufgabe 2b)

Erwartungswert

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^4 x \cdot 0,1x dx + \int_4^5 x(2-0,4x) dx \\ &= \int_0^4 0,1x^2 dx + \int_4^5 2x - 0,4x^2 dx \\ &= \left[0,1 \frac{x^3}{3} \right]_0^4 + \left[2 \frac{x^2}{2} - 0,4 \frac{x^3}{3} \right]_4^5 \\ &= 0,1 \cdot \frac{4^3}{3} - 0 + 2 \cdot \frac{5^2}{2} - 0,4 \cdot \frac{5^3}{3} - \left(2 \cdot \frac{4^2}{2} - 0,4 \cdot \frac{4^3}{3} \right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - E[X]^2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_0^4 x^2 \cdot 0,1x dx + \int_4^5 x^2 \cdot (2-0,4x) dx - 3^2 \\ &= \int_0^4 0,1x^3 dx + \int_4^5 (2x^2 - 0,4x^3) dx - 9 \\ &= \left[0,1 \frac{x^4}{4} \right]_0^4 + \left[2 \frac{x^3}{3} - 0,4 \frac{x^4}{4} \right]_4^5 - 9 \\ &= 0,1 \frac{4^4}{4} + \left(2 \cdot \frac{5^3}{3} - 0,4 \frac{5^4}{4} - \left(2 \cdot \frac{4^3}{3} - 0,4 \frac{4^4}{4} \right) \right) - 9 \\ &= \frac{7}{6} = 1,1\bar{6} \end{aligned}$$