Klausur

zur Vorlesung Stochastik

Sommersemester 2019

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Datum: 31.07.2019

Studienfach:

( ) Mathematik Vollfach Bachelor

( ) Technomath. Vollfach Bachelor

( ) GTW

( ) Master Education (alt)

( ) Master Education (neu)

( ) Sonstiges:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe	**Note**
Max. Punkte	15	25	20	25	15	100	—
Erreichte Punkte							

Aufgabe 1 (maximal 15 Punkte):

Angenommen, vor uns liegen vier rote, sechs schwarze und drei weiße Kugeln. In wie viele unterschiedliche Farbreihenfolgen können wir sie bringen?

Hinweis:
Es reicht zur Erlangung der vollen Punktzahl die Angabe einer Formel, in der die vier Grundrechenarten sowie ggfs. Fakultäten vorkommen. Der numerische Wert dieses Ausdrucks ist nicht weiter von Belang.

Aufgabe 2 (maximal 25 Punkte):

Es sei $\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, und es bezeichne $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ die Potenzmenge von Ω. Es sei ferner $\Omega' = \{2,3,4\}$, und es bezeichne $\mathcal{A}' = 2^{\Omega'}$ die Potenzmenge von Ω'. Schließlich sei die Abbildung

$$\begin{aligned} X : (\Omega, \mathcal{A}) &\rightarrow (\Omega', \mathcal{A}') \\ \omega = (\omega_1, \omega_2) &\mapsto X(\omega) = \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Ist X eine Zufallsvariable? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wir betrachten das Mengensystem

$$\sigma(X) := \{A \in \mathcal{A} : \text{ Es gibt ein } A' \in \mathcal{A}' \text{ mit } X^{-1}(A') = A\}.$$

Geben Sie eine Menge A^* an, die ein Element von $\mathcal{A}$, aber kein Element von $\sigma(X)$ ist.

Aufgabe 3 (maximal 20 Punkte):

Gegeben seien fünf Urnen. Jede Urne enthält genau zehn Kugeln. In der j-ten Urne befinden sich genau j rote Kugeln, für $1 \leq j \leq 5$. Eine Urne wird unter Berücksichtigung der Auswahlwahrscheinlichkeiten 0,4 für die Urne 1, 0,3 für die Urne 2, 0,1 für die Urne 3, 0,2 für die Urne 4 und 0 für die Urne 5 ausgewählt, und aus der ausgewählten Urne wird dann rein zufällig genau eine Kugel gezogen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel rot ist?

Aufgabe 4 (maximal 25 Punkte):

Es bezeichne Z eine auf $\mathbb{R}$ standardnormalverteilte Zufallsvariable, die auf einem nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert ist, und es bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die transformierte Zufallsvariable $X := -\log(1 - \Phi(Z))$ die Exponentialverteilung mit Intensitätsparameter 1 besitzt. Dabei bezeichne log die natürliche Logarithmusfunktion.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der transformierten Zufallsvariable X.

(c) Geben Sie eine Transformation $g : \mathbb{R} \to \{0, 1\}^4$ an, so dass die transformierte Zufallsgröße $g(Z)$ eine Multinomialverteilung besitzt mit $d = 4$ Kategorien, Stichprobenumfang $n = 1$ und Vektor der Zellbesetzungswahrscheinlichkeiten $\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^\top$.

Hinweis:
Die Funktion Φ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (maximal 15 Punkte):

Ermitteln Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten (ein kurzer Satz pro Antwort genügt).

(i) Es bezeichne Ω eine nicht-leere Menge und es bezeichne $\mathcal{A} = 2^\Omega$ die Potenzmenge von Ω. Dann kann es kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ geben, so dass für jedes Elementarereignis $\{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$ gilt: $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$.

(ii) Es seien X und Y zwei stochastisch unabhängige, jeweils reellwertige Zufallsvariablen, die auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert sind. Dabei sei X eine stetige Zufallsvariable und Y eine diskrete Zufallsvariable. Dann gilt stets, dass die Zufallsvariable $S := X + Y$ weder diskret noch stetig ist.

(iii) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $A_1 \in \mathcal{A}$ sowie $A_2 \in \mathcal{A}$ zwei stochastisch unabhängige Ereignisse. Dann gilt stets $\mathbb{P}(A_2 | A_1) \neq 0$, d. h., es ist unmöglich, dass das Eintreten von A_1 das Eintreten von A_2 ausschließt.

(iv) Es bezeichne X eine $\{0, 1\}$-wertige Zufallsvariable, die auf einem nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraum definiert ist. Dann existiert für jede natürliche Zahl k das k-te Moment von X, und alle diese Momente haben den gleichen Wert.

(v) Die Varianz einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariable kann die Varianz einer auf $\mathbb{R}$ standardnormalverteilten Zufallsvariable niemals überschreiten.

Hinweise:

Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt, eine sinnvolle Begründung ergibt jeweils zwei weitere Punkte. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.