Aufgabe 1 (12 Punkte)
Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_4\})$ und $\mu(\{\omega_1, \omega_3\}) = \mu(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}$. Gegeben sei die Funktion

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} \omega_1 \mapsto & 1 \\ \omega_2 \mapsto & 4 \\ \omega_3 \mapsto & 1 \\ \omega_4 \mapsto & 2 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie das Integral $\int f \, d\mu$.

(b) Berechnen Sie für das Zählmaß μ_z das Integral $\int f \, d\mu_Z$.

(c) Berechnen Sie das Integral $\int f^2 d\mu$.

Aufgabe 2 (13 Punkte)
Gegeben seien für Parameter $a, b > 0$ die Dichten bezüglich des Lebesguemaßes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Begründen oder wiederlegen Sie:

$$f \odot \lambda = g \odot \lambda$$

(b) Leiten sie mit dem Transformationssatzes die Dichte der Zufallsvariable

$$Y = g(X) = \frac{1}{X}$$

her.