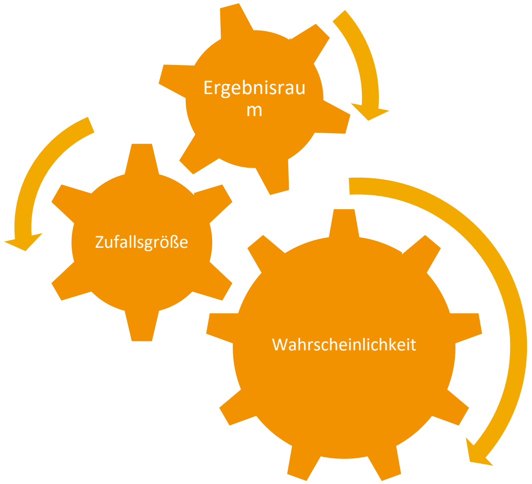
# Zufallsgrößen

Eine Zufallsgröße ist...

- eine Abbildung des Ergebnisraums auf reelle Zahlen. $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
- in Ausprägungen unterteilt. Jedem möglichem Ergebnis wird eine Zahl zugeordnet.
- nötig, um vor allem bei Ergebnisräumen mit qualitativen Ausprägungen eine Bewertungsgrundlage zu schaffen.
  - Ergebnisraum besteht aus Zahlen
  - Ergebnisraum besteht aus Intervall(en)
  - Ergebnisraum besteht aus non-numerischen Werten



# Arten von Zufallsgrößen

Bei Merkmalen/Zufallsgrößen wird zwischen diskreten und stetigen Merkmalen unterschieden

## Diskretes Merkmal

- Abzählbare Anzahl an Ausprägungen
- Charakterisierung mit Wahrscheinlichkeitsfunktion

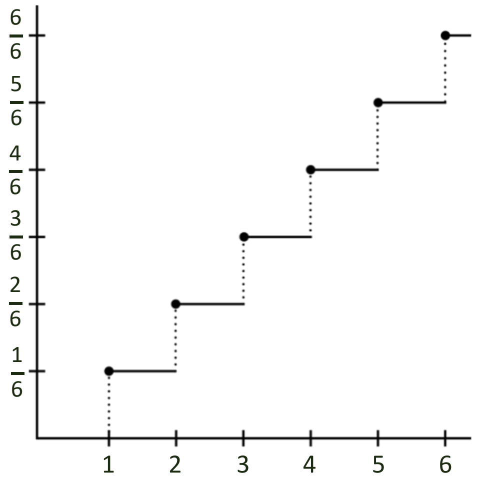
## Stetiges Merkmal

- Mögliche Ausprägungen liegen in einem Intervall (unendlich viele Ausprägungen)
- Charakterisierung mit Dichtefunktion

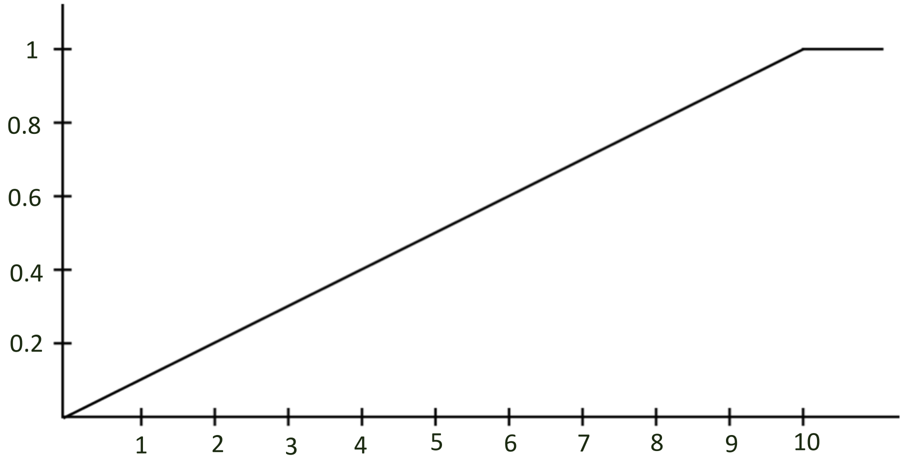
# Verteilungsfunktion

- Definition der Verteilungsfunktion
  - $F(x) = P(X \leq x)$
- Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X einen Wert kleiner oder gleich x annimmt

Diskretes Merkmal




Stetiges Merkmal

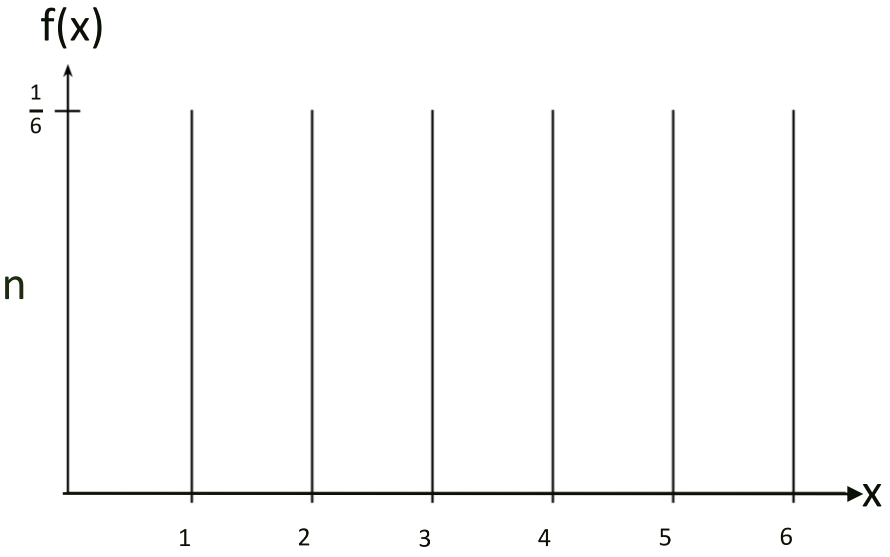


# Wahrscheinlichkeitsfunktion

– Funktion der Wahrscheinlichkeitsfunktion: $f(x) = P(X = x)$

– Es gilt: $\sum_{i=1}^{k} f(x_i) = 1$

Einmal Würfeln




$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$f(1) = P(X = 1) = 1/6$

$\vdots$

$f(6) = P(X = 6) = 1/6$

$$\sum_{i=1}^{6} f(x_i) = f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6) =$$

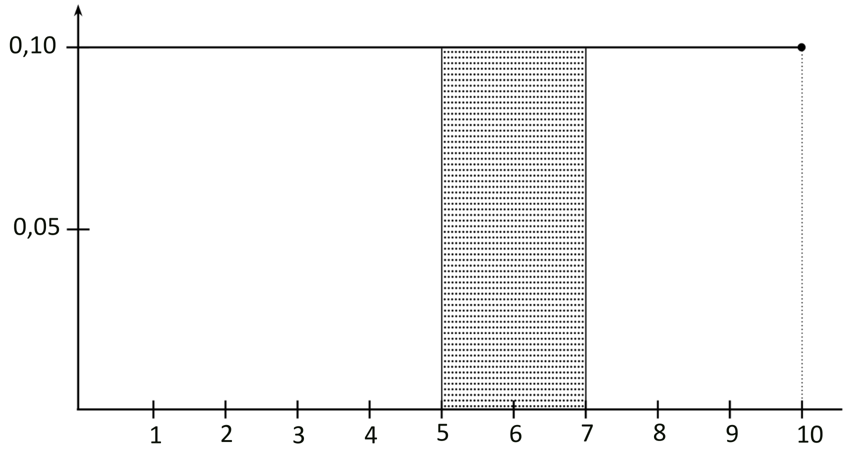
$$= P(X=1)+P(X=2)+ \ldots + P(X=6) = 1$$

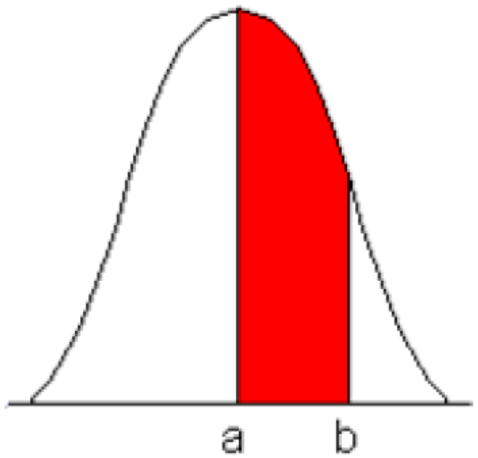
# Dichtefunktion

– Funktion der Dichtefunktion:

$$P(-\infty \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(b)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



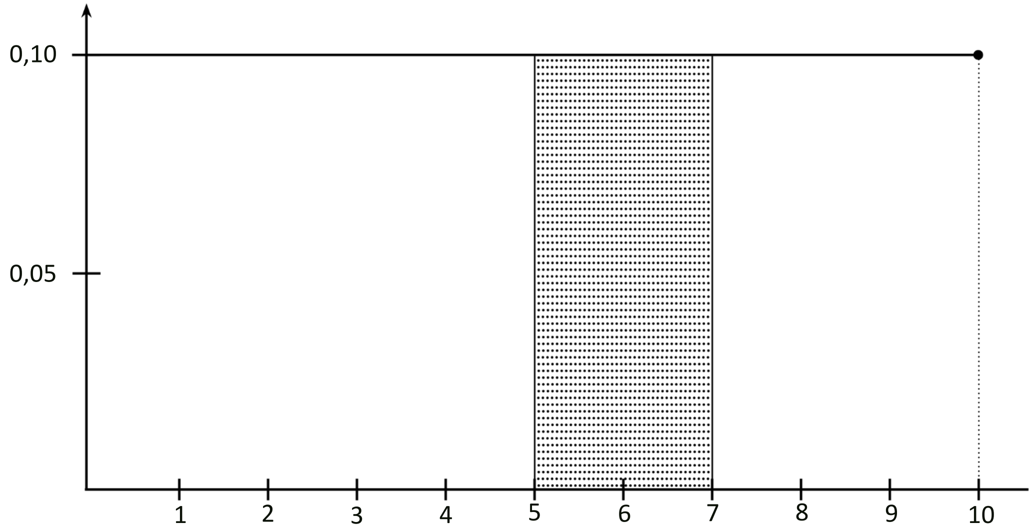




– Axiome der Positivität und der Normiertheit sind erfüllt

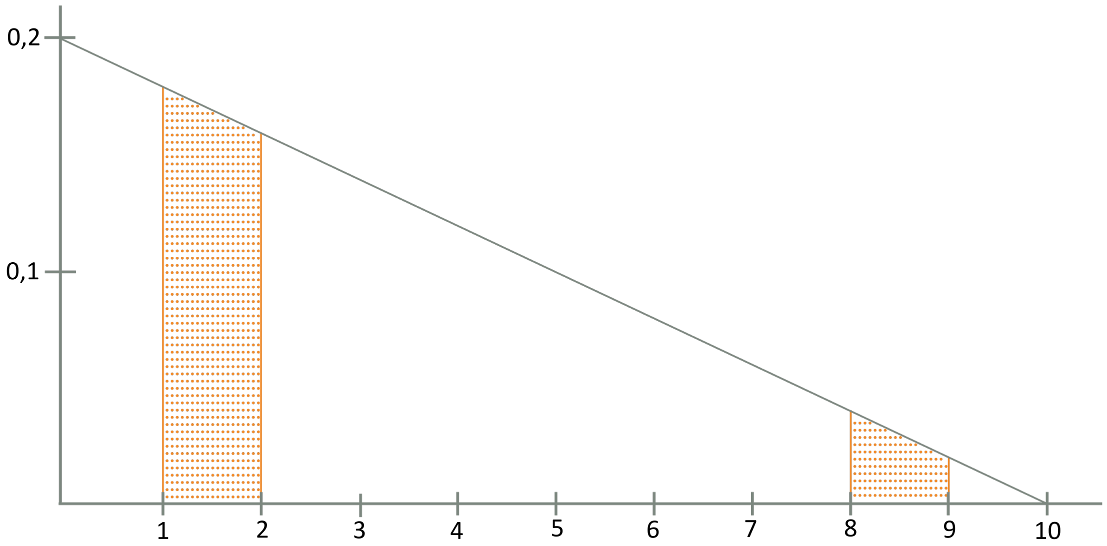
– Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wert beträgt 0

# Beispiel Bus

Wartezeit auf den Bus




Glück beim Warten auf den Bus



# Erwartungswert

- Erwartungswert μ einer **diskreten** Zufallsgröße als Mittelwert bei häufiger Durchführung
- Auch als Schwerpunkt der Verteilung bezeichnet

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i)$$

- Varianz

$$Var(X) = \sigma^2 = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 P(X = x_i)$$

- Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{Var(x)}$$

# Erwartungswert

- Erwartungswert einer stetigen Zufallsgröße

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- Varianz

$$Var(X) = \sigma^2 = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \, f(x) \, dx$$

- Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{Var(x)}$$

Beispiel: Warten auf den Bus

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{10} x \frac{1}{10} \, dx = 5$

$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-5)^2 f(x) \, dx = \int_0^{10} (x-5)^2 \frac{1}{10} \, dx = \frac{25}{3}$ ; $\sigma_X = \sqrt{\frac{25}{3}} = 2{,}9$

# Lineare Transformation

Gilt als Hilfe zur einfacheren Berechnung von Erwartungswert und Varianz (in bestimmten Fällen)

$E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$ → $E(Y) = E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$

$Var(a + b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$ → $Var(Y) = Var(a + b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$

Beispiel: Weg zur Arbeit:

$E(Y) = E(0{,}5 + \frac{1}{60}X) = 0{,}5 + \frac{1}{60}E(X) = \frac{30}{60} + \frac{5}{60} = \frac{35}{60}$

$Var(Y) = Var(0{,}5 + \frac{1}{60}X) = (\frac{1}{60})^2 \cdot Var(X) = \frac{1}{3600} \cdot \frac{25}{3} = 0{,}0023$ $\sigma_Y = 0{,}0481$

# Stochastische Unabhängigkeit

– Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen

Zwei Zufallsgrößen X und Y sind voneinander unabhängig, wenn gilt:

$P(X = x_0 \text{ und } Y = y_0) = P(X = x_0) \cdot P(Y = y_0)$

$P(X \leq x_0 \text{ und } Y \leq y_0) = P(X \leq x_0) \cdot P(Y \leq y_0)$

– Erwartungswert und Varianz einer Summe von Zufallsgrößen

Sind $X_1$ und $X_2$ beliebige Zufallsgrößen, so gilt: $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$. → Unabhängigkeit nicht vorausgesetzt

$X_1$ und $X_2$ sind unabhängig, wenn gilt: $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$ → Unabhängigkeit vorausgesetzt

Beispiel: R: 1. Würfelwurf (roter Würfel) ; B: 2. Würfelwurf (blauer Würfel) $S = R + B$

$E(R) = E(B) = 3{,}5$ $Var(R) = Var(B) = 2{,}9166$ $\sigma_S = \sqrt{Var(S)} = \sqrt{Var(R) + Var(B)} = 2{,}4152$

$E(S) = E(R) + E(B) = 7$ $Var(S) = Var(R) + Var(B) = 5{,}833$

# I.I.D. Zufallsgrößen

i.i.d. Zufallsgrößen (independent and indentically distributed)

- Unabhängige Zufallsgrößen mit identischer Verteilung
- Für die n-malige Durchführung des gleichen Experiments

Ist $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$, so gilt:

$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = n\mu$

$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) = n\sigma^2$

$E(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)) = E(\overline{X}) = \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$

$Var(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)) = Var(\overline{X}) = (\frac{1}{n})^2 \cdot Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

!

# Uebungs aufgaben

# Aufgabe 1.3 der AS

Für die Ereignisse A und B sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$P(A) = 0{,}2$ $\qquad$ $P(B) = P(\overline{B})$ $\qquad$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4$

a) Bestimmen Sie $P(B)$, $P(A \cap B)$ und $P(A|B)$.

b) Zusätzlich wird ein von B unabhängiges Ereignis C berücksichtigt mit $P(C|A) = 0{,}6$ und $P(C|\overline{A}) = 0{,}85$.

Bestimmen Sie $P(C)$, $P(A|C)$, $P(\overline{A}|C)$ und $P(C|\overline{B})$.

# Aufgabe 1.3 der AS - Lösung

a)

- $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(B) \Leftrightarrow P(B) = 0{,}5$
- Einsetzen des umgeformten Additionssatzes: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}6 = 0{,}1$
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$

b)

Wenn B und C unabhängig, dann gilt $P(B|C) = P(B)$, $P(C|B) = P(C)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

- $P(C)$ unter Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit:
  $P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}12 + 0{,}68 = 0{,}8$
- $P(A|C) = \frac{P(A) \cdot P(C|A)}{P(C)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}8} = 0{,}15$
- $P(\bar{A}|C) = \frac{P(C|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}{P(C)} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}8}{0{,}8} = 0{,}85$
- $P(C|\bar{B}) = \frac{P(C \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(C) \cdot P(\bar{B})}{P(\bar{B})} = P(C) = 0{,}8$

# Aufgabe 1.4 der AS

Der Besitzer einer Obstplantage behandelt 80% seines Baumbestandes mit Spritzmitteln (S). Erfahrungsgemäß beträgt die Wahrscheinlichkeit einer Baumerkrankung (K) bei den gespritzten Bäumen 10% bei den ungespritzten 24%.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei der nächsten Kontrolle ein zufällig ausgewählter Baum erkrankt ist.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein erkrankter Baum nicht gespritzt worden?
c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein gesunder Baum nicht gespritzt worden ist.

# Aufgabe 1.4 der AS - Lösung

S: „Einsatz von Spritzmitteln“ ; K: „Baumerkrankung“

$P(S) = 0{,}8 \leftrightarrow P(\bar{S}) = 0{,}2$

$P(K|S) = 0{,}1 \leftrightarrow P(\bar{K}|S) = 0{,}9$ $P(K|\bar{S}) = 0{,}24 \leftrightarrow P(\bar{K}|\bar{S}) = 0{,}76$

a)

Satz der totalen Whrs.: $P(K) = P(K|S) \cdot P(S) + P(K|\bar{S}) \cdot P(\bar{S}) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}24 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$

b)

Satz von Bayes: $P(\bar{S}|K) = \frac{P(K|\bar{S}) \cdot P(\bar{S})}{P(K)} = \frac{0{,}24 \cdot 0{,}2}{0{,}128} = 0{,}375$

c)

$P(\bar{S}|\bar{K}) = \frac{P(\bar{K}|\bar{S}) \cdot P(\bar{S})}{P(\bar{K})} = \frac{0{,}76 \cdot 0{,}2}{0{,}872} \approx 0{,}174$

# Aufgabe 1.5 der AS

**Aufgabe 1.5**

Auf einem Schlachthof ist bekannt, dass 20% aller angelieferten Tiere mit unzulässigen Substanzen behandelt wurden (B). Bei einer Einzeluntersuchung kann aus Zeit- und Kostengründen nur ein nicht ganz zuverlässiger Test (P = Positiv) angewandt werden. Dieser Test besitzt eine Sensitivität von 80% und eine Spezifität von 90%.

Ermitteln sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a) ein Tier mit unzulässigen Substanzen behandelt wurde, wenn der Test dies anzeigt (positiver Test).

b) ein Tier mit unzulässigen Substanzen behandelt wurde, wenn der Test dies nicht anzeigt.

# Aufgabe 1.5 der AS - Lösung

B: „Behandelt mit unzulässiger Substanz“

$P(B) = 0{,}2 <-> P(\bar{B}) = 0{,}8$

$P(P|B) = 0{,}8$ (Sensitivität) $<-> P(\bar{P}|B) = 0{,}2$

P: „Test zeigt ein positives Ergebnis“

$P(\bar{P}|\bar{B}) = 0{,}9$ (Spezifität) $<-> P(P|\bar{B}) = 0{,}1$

a)

$$P(P|B) = \frac{P(B) \cdot P(P|B)}{P(P)} = \frac{P(B) \cdot P(P|B)}{P(B) \cdot P(P|B) + P(\bar{B}) \cdot P(P|\bar{B})} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}1} = \frac{0{,}16}{0{,}24} \approx 0{,}667$$

b)

$$P(B|\bar{P}) = \frac{P(B) \cdot P(\bar{P}|B)}{P(B) \cdot P(\bar{P}|B) + P(\bar{B}) \cdot P(\bar{P}|\bar{B})} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}2}{0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}9} = \frac{0{,}04}{0{,}76} \approx 0{,}053$$

# Aufgabe 1.6 der AS

Ein Veranstalter bietet ein Würfelspiel mit einem fairen Würfel und folgendem Auszahlungsplan an:

| **Augenzahl** | **Auszahlung** |
|---|---|
| 1, 2, 3 | 0 € |
| 4, 5 | 3 € |
| 6 | 6 € |

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X „Auszahlung“.
b) Der Einsatz beträgt 3 € pro Spiel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsunktion der Zufallsvariable G „Gewinn des Spielers“.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler einen positiven Gewinn erzielt?
d) Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Varianz von G.

# Aufgabe 1.6 der AS - Lösung

a)

- Wahrscheinlichkeitsfunktion

| x | f(x) |
|---|---|
| 0 | 1/2 |
| 3 | 1/3 |
| 6 | 1/6 |
| Sonst | 0 |

- Verteilungsfunktion

| x | F(x) |
|---|---|
| $-\infty \leq x < 0$ | 0 |
| $0 \leq x < 3$ | 1/2 |
| $3 \leq x < 6$ | 5/6 |
| $x \geq 6$ | 1 |

b)

| g | f(g) | F(g) |
|---|---|---|
| $-\infty < g < -3$ | 0 | 0 |
| -3 | 1/2 | 1/2 |
| $-3 < g < 0$ | 0 | 1/2 |
| 0 | 1/3 | 5/6 |
| $0 < g < 3$ | 0 | 5/6 |
| 3 | 1/6 | 1 |
| $g \geq 3$ | 0 | 1 |

c)

$P(G > 0) = P(0 < G < 3) + P(G = 3) + P(G \geq 3) = 0 + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$

d)

$E(G) = \sum_g g \cdot f(g) = -3 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = -1$ [€]

$Var(G) = \sum_g (g - E(G))^2 \cdot f(g) = \frac{1}{2} \cdot (-3 + 1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (0 + 1)^2 + \frac{1}{6} \cdot (3 + 1)^2 = 2 + \frac{2}{6} + \frac{16}{6} = 5$ [€$^2$]

# Aufgabe 1

Bei einem Glückspiel wird eine faire Münze einmal geworfen. Bei Zahl gewinnst du 5 Euro und bei Kopf verlierst du 6 Euro. Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn bei einem Münzwurf an.

- Mit welchem Ertrag im Mittel ist zu rechnen? Handelt es sich bei diesem Glücksspiel um ein rentables Spiel?
- Berechne die Varianz und Standardabweichung.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i)$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 P(X = x_i)$$

# Aufgabe 1 - Lösung

– Hier ist $\Omega$={K,Z}, $X(x_i)$={5 für $x_i$=Z, -6 für $x_i$=K} und $P(X=x_i)$ jeweils 0,5.

– $E(X) = \sum x_i \cdot P(X=x_i) = 5 \cdot 0{,}5 + (-6) \cdot 0{,}5 = -0{,}5$
  – Es wird ein Verlust von 50 Cent erwartet. Das Glücksspiel ist langfristig nicht rentabel.

– $Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot P(X=x_i) = (5-(-0{,}5))^2 \cdot 0{,}5 + (-6-(-0{,}5))^2 \cdot 0{,}5 = 30{,}25$
  – Die mittlere quadratische Abweichung des Gewinns bei diesem Glücksspiel ist also 30,25.
  – Standardabweichung $\boldsymbol{\sigma}_X = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{30{,}25} = 5{,}5$

# Aufgabe 1.11 der AS

In einem Spielcasino wird folgendes Spiel angeboten: Es werden zwei Laplace-Würfel einmal ausgespielt, der Einsatz beträgt 5 Euro. Zeigt mindestens ein Würfel eine Eins, erhält man eine Auszahlung von 7 Euro; ist die Augensumme größer als Acht, erhält man die Summe der Augenzahlen in Euro. Pro Spiel wird ein Nettoeinkommen (X) von $-\frac{1}{12}$ (= Verlust) erwartet.

a) Der Spieler nimmt 200-mal an diesem Spiel teil. Ermitteln Sie den erwarteten Gesamtgewinn bzw. -verlust und benennen sie das statistische Vorgehen, dass diese Rechnung möglich/einfacher macht.

b) Ein im Casino spielender Statistiker schlägt vor, den Einsatz auf 4 Euro zu senken, dafür jedoch nur 5 Euro auszuzahlen, falls mindestens ein Würfel eine Eins zeigt. Alle anderen Bedingungen bleiben gleich. Überlegen Sie, ob sich diese Variante für den Spieler auf die Dauer (200 Spiele) lohnen würde.

# Aufgabe 1.11 der AS - Lösung

a)

- Durch lineare Transformation einfach möglich: $E(200 \cdot X) = 200 \cdot E(X)$
- $E(X_{gesamt}) = 200 \cdot E(X) = 200 \cdot (-\frac{1}{12}) = -16{,}67$

b)

- $X_{neu} = \{-4;1;5;6;7;8\}$
- $E(X_{neu}) = \frac{15}{36} \cdot (-4) + \frac{11}{36} \cdot 1 + \frac{4}{36} \cdot 5 + \frac{9}{36} \cdot 6 + \frac{2}{36} \cdot 7 + \frac{1}{36} \cdot 8 = \frac{11}{36} \approx 0{,}31$
- $E(X_{gesamt,neu}) = 200 \cdot \frac{11}{36} \approx 61{,}11$
- Der Erwartungwert ist positiv, d. h. der Spieler würde auf Dauer einen Gewinn erzielen. Das Spiel lohnt sich für den Spieler.

# it`s time for a quiz!

Tutorium – Statistik für JoKo