Häufigkeit vs. Wahrscheinlichkeit

Sind Häufigkeiten Wahrscheinlichkeiten?

Häufigkeiten

- feste Aussage über durchgeführte Datenerhebung
- Arten von Häufigkeiten
  - **Absolut**: Anzahl an eingetretenen Ereignissen
  - **Relativ**: Anzahl im Verhältnis zu den Versuchen

Wahrscheinlichkeit

- Eintrittswahrscheinlichkeit, berechnet aus bekannten Informationen
- Häufigkeit ≠ Wahrscheinlichkeit

Aber: Je höher die Anzahl der Versuche, desto stärker nähert sich die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit an

Häufigkeit vs. Wahrscheinlichkeit

- 10 Kugeln sind in einem Beutel (gelb, rot und blau). Die Konstellation der Farben ist jedoch unbekannt. Es soll 100 Mal (mit Zurücklegen) gezogen werden.

- Wie oft kommt welche Farbe vor?

Gelb	Rot	Blau
19	81	0
19/100	81/100	0/100
≈ zwei Kugeln	≈ acht Kugeln	≈ null Kugeln

Risikoarten

Zusammenhang von Zigarettenkonsum und Lungenkrebs

- **Absolutes Risiko**
  - Vergleichende Angabe von Krankheitswahrscheinlichkeiten
  - 10 % bei Rauchern und ca. 0, 5 % bei Nichtrauchern
- **Relatives Risiko**
  - Verhältnis der Krankheitswahrscheinlichkeiten
  - Faktor 20 - 30
- **Erwarteter Effekt**
  - Die erwartete Anzahl der durch den Risikofaktor zusätzlich betroffenen Personen
  - Bis zu 30.000 Personen versterben in Deutschland jährlich aufgrund ihres Zigarettenkonsums zusätzlich an Lungenkrebs

Axiome nach Kolmogorov

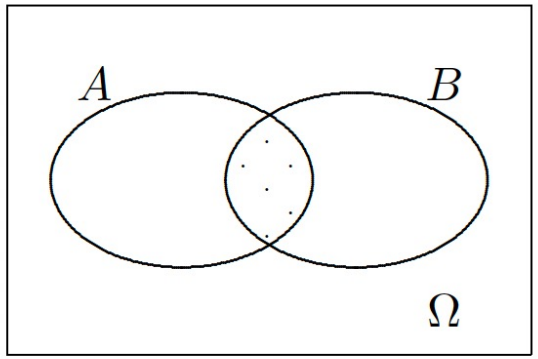
- Axiom der Positivität: $0 \leq P(A) \leq 1$

- Axiom der Additivität: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für disjunkte Ereignisse

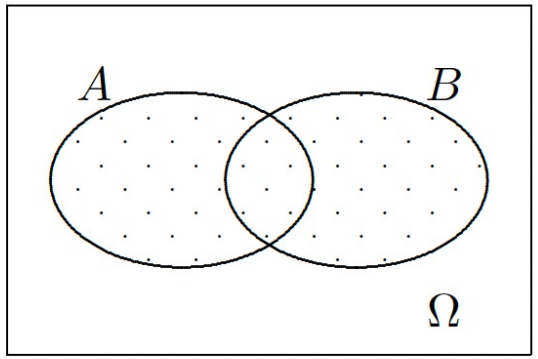
- Axiom der Normiertheit: $P(\Omega) = 1$

-> sämtliche Zusammenhänge zwischen Ereignissen lassen sich auf diese drei Axiome zurückführen

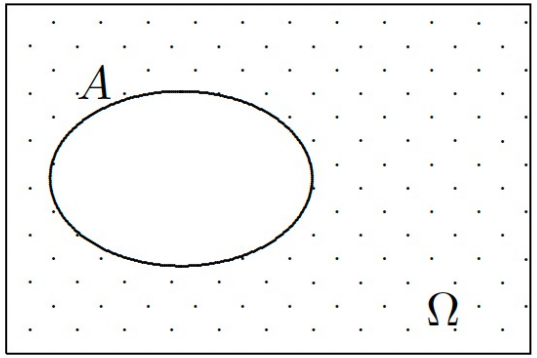
Mengenoperationen



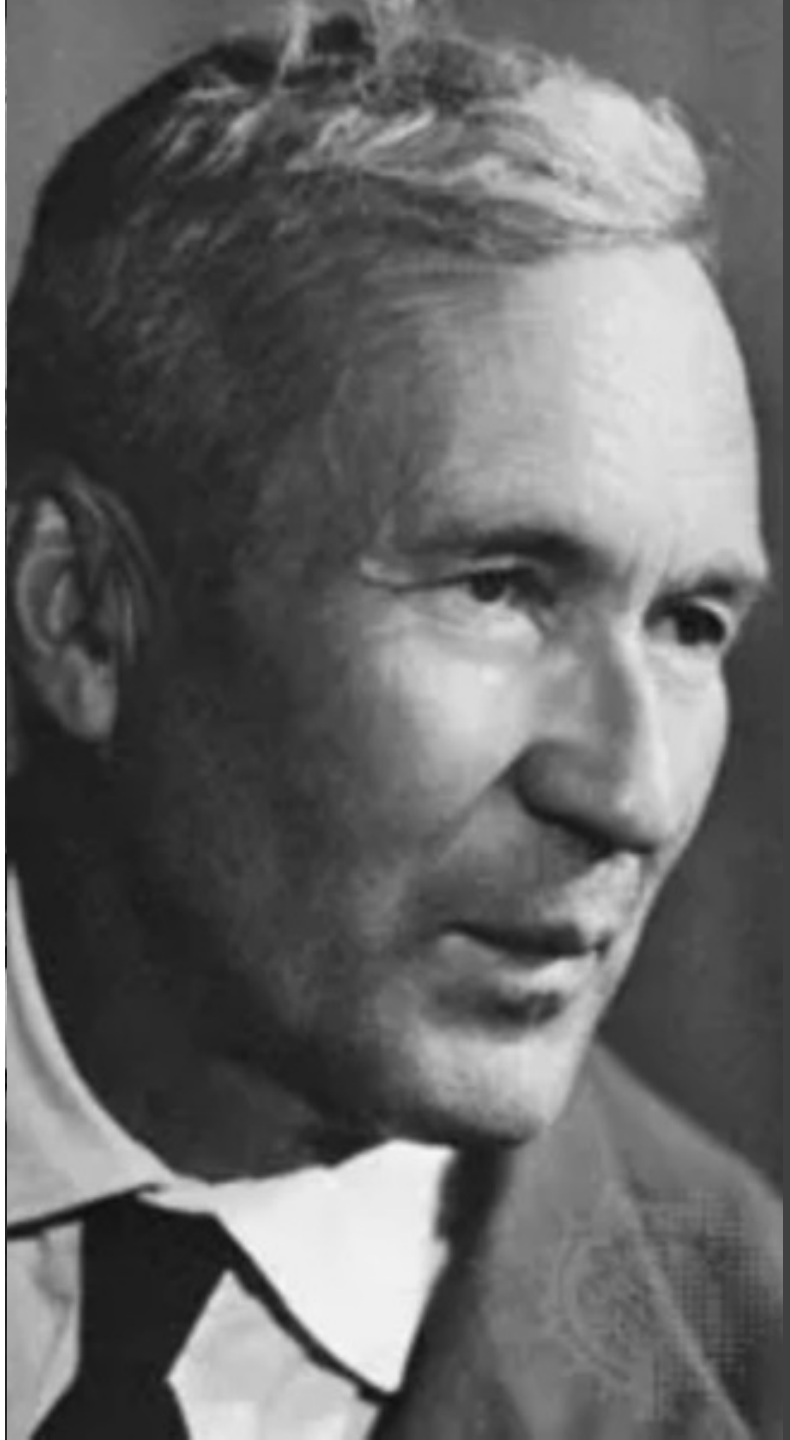
$A \cap B$



$A \cup B$



A^c



Axiomatik

Zufallsexperiment: Vorgang zur Ermittlung eines Ergebnisses aus dem Ergebnisraum Ω

Ergebnis: einzelne Merkmalsausprägung
Ereignis: Teilmenge des Ergebnisraums

Beispiele:

- Ereignis A: „große Zahlen“ beim Würfeln -> A= {4, 5, 6}
- Ereignis B: „mehr als 12 Stunden pro Tag“ -> B= {**ω**|12<**ω**≤24}

Wahrscheinlichkeiten

Rechenregeln zu Wahrscheinlichkeiten am Beispiel Laplace-Würfel

Sicheres Ereignis: $P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \frac{6}{6} = 1$

Ereignis „gerade Zahlen“: $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Gegenereignis: $P(\{1, 3, 5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Additionssatz: $P(\{1, 2\} \cup \{5, 6\}) = P(\{1, 2, 5, 6\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ / $P(\{1, 2\} \cup \{5, 6\}) = P(\{1, 2\} + P(\{5, 6\}) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

!

Achtung!

Prüfen, ob die Ereignisse disjunkt sind!

- disjunkt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- nicht disjunkt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

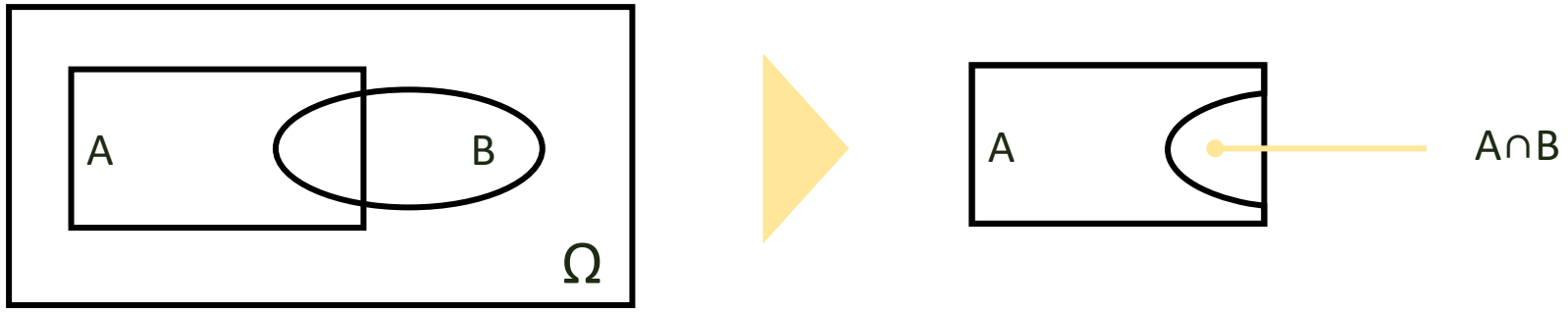
Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Formeln der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P(B|A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P(A|B) := \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

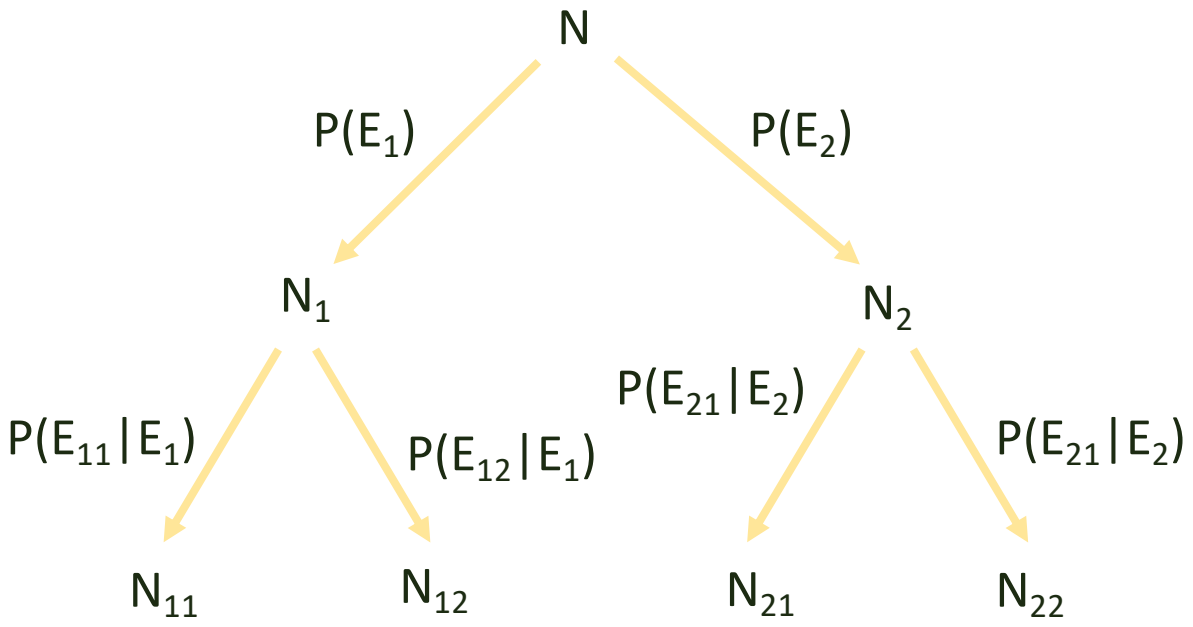
  - Quotient der Vereinigungsmenge beider Ereignisse und der Wahrscheinlichkeit der Bedingung

- Grafische Darstellung



Wahrscheinlichkeitsbäume

Wahrscheinlichkeitsbäume als Darstellung von bedingten Wahrscheinlichkeiten:



Beispiel Rechnung:

$$N = N_1 + N_2$$
$$= N_{11} + N_{12} + N_{21} + N_{22}$$

$$P(E_1) = \frac{N_1}{N}$$

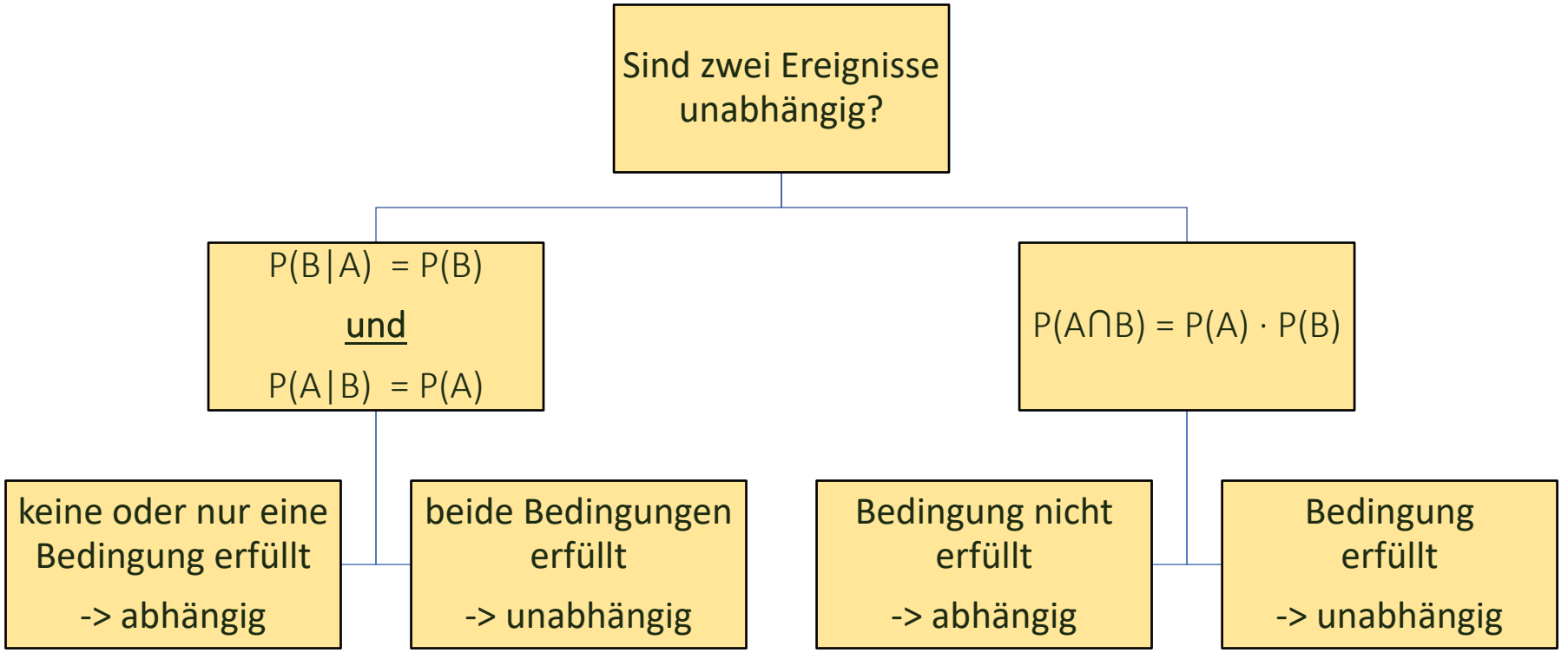
$$P(E_{11}|E_1) = \frac{N_{11}}{N_1}$$

Wichtige Begriffe und Werte

- Prävalenz
  - Vortestwahrscheinlichkeit
  - Wahrscheinlichkeit aufgrund von Vorwissen (a-priori)
- Sensitivität
  - Sicherheit des Tests/Trefferquote
  - Wahrscheinlichkeit, dass positiver Zustand/Status der Wirklichkeit durch Test richtigerweise als positiv angenommen wird (z.B. kranke Person wird erkannt)
- Spezifität
  - Wahrscheinlichkeit, dass negativer Zustand/Status der Wirklichkeit durch Test richtigerweise als negativ angenommen wird (z.B. gesunde Person wird als gesund erkannt)
- Falsche Diagnose
  - Wahrscheinlichkeit, dass ein positiver/negativer Zustand der Wirklichkeit durch Test fälschlicherweise als negativ/positiv angenommen wird

Wahrscheinlichkeitsbäume

Bedingungen für Unabhängigkeit zweier Ereignisse



Wichtige Begriffe und Werte

- Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

- Multiplikationssatz:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

- Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^C) \cdot P(A^C)$$

- Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^C) \cdot P(A^C)} = \frac{\text{Multiplikationssatz}}{\text{Satz der totalen Wahrscheinlichkeit}}$$

Uebungsaufgaben

Aufgabe 1

Die Regeln eines Würfelspiels besagen: „Es werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen und aus den beiden Augenzahlen die größtmögliche Zahl gebildet.“ (Beispiel: Bei den Augenzahlen „1“ und „2“ wird „21“ gebildet.)

1) Bestimme den Ergebnisraum Ω.

2) Gib folgende Ereignisse in Mengenschreibweise an und bestimme ihre jeweilige Wahrscheinlichkeit
   - A: „Die gebildete Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern.“
   - B: „Die Quersumme der Zahl ist 6.“
   - C: „Die Einerziffer ist größer als die Zehnerziffer.“
   - D: „Die Zahl ist größer als 42.“
   - E: „Die Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern und die Quersumme der Zahl ist 6.“
   - F: „Die Zahl ist größer als 42 oder besteht aus zwei gleichen Ziffern.“

Aufgabe 1 - Lösung

1) Ergebnisraum $\Omega = \{11;21;22;31;32;33;41;42;43;44;51;52;53;54;55;61;62;63;64;65;66\}$

2) Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten
   - A: „Die gebildete Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern.“ $= \{11;22;33;44;55;66\}$; $P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$
   - B: „Die Quersumme der Zahl ist 6.“ $= \{33;42;51\}$; $P(B) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$
   - C: „Die Einerziffer ist größer als die Zehnerziffer.“ $= \{\}$; $P(C) = 0$
   - D: „Die Zahl ist größer als 42.“ $= \{43;44;51;52;53;54;55;61;62;63;64;65;66\}$; $P(D) = \frac{13}{21}$
   - E: „Die Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern und die Quersumme der Zahl ist 6.“ $= A \cap B = \{33\}$; $P(E) = P(A \cap B) = \frac{1}{21}$
   - F: „Die Zahl ist größer als 42 oder besteht aus zwei gleichen Ziffern.“ $= D \cup A = \{43;44;51;52;53;54;55;61;62;63;64;65;66\} \cup \{11;22;33;44;55;66\} = \{11;22;33;43;44;51;52;53;54;55;61;62;63;64;65;66\}$

$$P(F) = P(D \cup A) = P(D) + P(A) - P(D \cap A) = \frac{13}{21} + \frac{6}{21} - \frac{3}{21} = \frac{16}{21}$$

Aufgabe 2

Eine Urne enthält 100 Kugeln. 70 Kugeln bestehen aus dem Material Holz und 30 Kugeln sind aus Kunststoff. 25 der Holzkugeln sind mit der Farbe rot gestrichen und 45 sind blau. 10 der Kunststoffkugeln sind rot und 20 sind blau.

- Folgende Ereignisse werden definiert:
  - A: „Die Kugel ist aus Holz.“
  - B: „Die Kugel ist rot.“

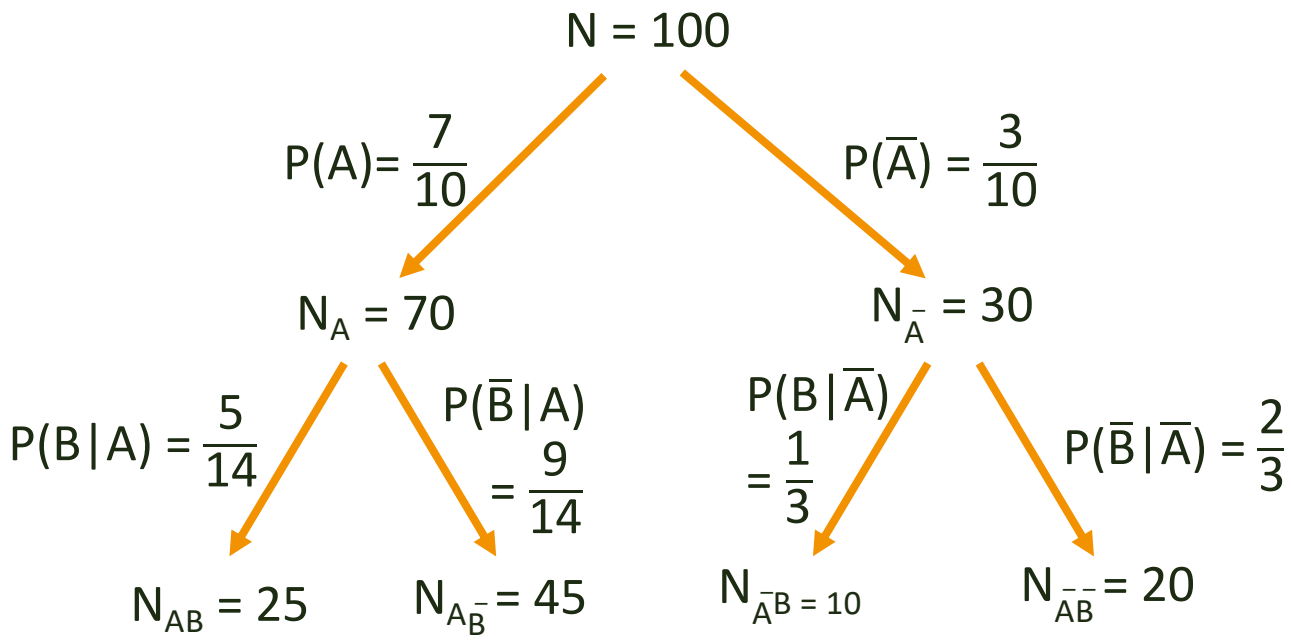
$\overline{A}$: „Die Kugel ist aus Kunststoff.“
$\overline{B}$: „Die Kugel ist blau.“

1) Erstelle ein Baumdiagramm unter Angabe der auftretenden Häufigkeiten und deren Wahrscheinlichkeiten.

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Aufgabe 2 - Lösung



Aufgabe 3

Eine neu entwickelte Maschine kann gefälschte Geldscheine erkennen und wurde in der Entwicklung getestet. Man fand heraus, dass die Maschine **bei einem falschen Schein mit 96% Sicherheit Alarm schlägt**. Allerdings gibt die Maschine **auch bei 1% der echten Geldscheine Alarm**. Zusätzlich ist bekannt, dass **0,01% aller im Umlauf befindlichen Geldscheine Fälschungen** sind.

A = Maschine schlägt Alarm
F = Geldschein ist falsch

– Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Geldschein eine Fälschung ist, wenn die Maschine Alarm schlägt. Muss die Maschine noch weiter verbessert werden oder ist sie marktreif?

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Multiplikationssatz:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^C) \cdot P(A^C)$$

Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^C) \cdot P(A^C)}$$

Aufgabe 3 - Lösung

1) Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Multiplikationssatz, Satz von Bayes

Aus dem Infotext ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

$P(F) = 0{,}0001$ -> $P(\bar{F}) = 0{,}9999$
$P(A|\bar{F}) = 0{,}01$ $P(A|F) = 0{,}96$

Gesucht: $P(F|A) = \frac{P(A|F) \cdot P(F)}{P(A)}$ (Satz von Bayes)

Rechenweg:

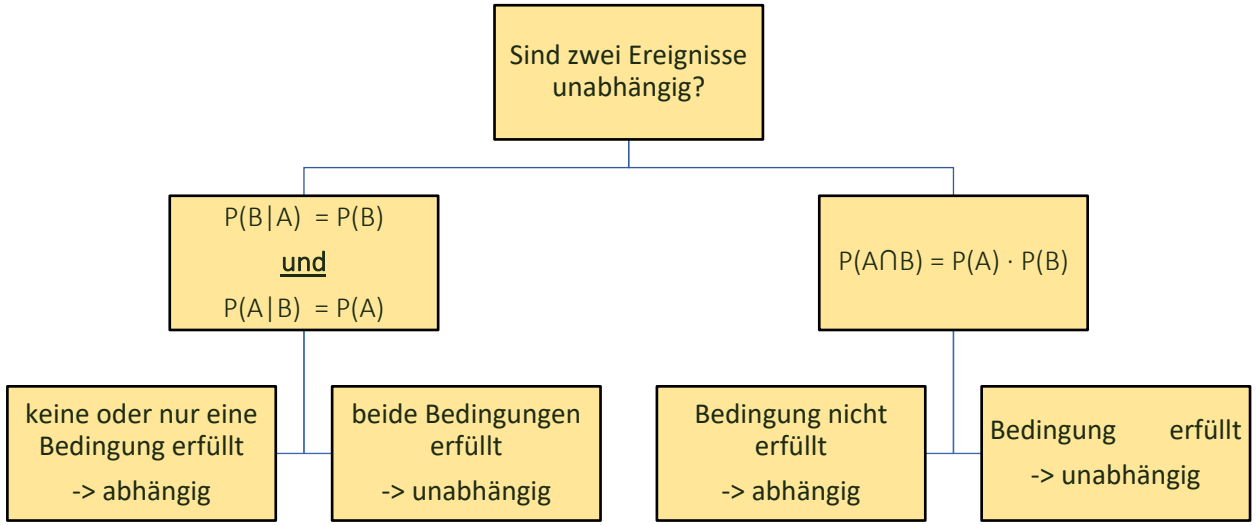
$P(A) = P(A|F) \cdot P(F) + P(A|\bar{F}) \cdot P(\bar{F}) = 0{,}96 \cdot 0{,}0001 + 0{,}01 \cdot 0{,}9999 = 0{,}010095$ (Satz der totalen Wahrscheinlichkeit)

$P(F|A) = \frac{0{,}96 \cdot 0{,}0001}{0{,}010095} = 0{,}0095$ A: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Geldschein eine Fälschung ist, wenn die Maschine Alarm schlägt, liegt bei 0,95 Prozent.

Aufgabe 4

Julian und Stefanie fehlen regelmäßig in der Statistik-Vorlesung, und zwar Julian mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% und Stefanie mit einer Wahrscheinlichkeit von 45%. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide anwesend sind beträgt 40%.

Sind die Abwesenheiten von Julian und Stefanie unabhängige Ereignisse?



Aufgabe 4 - Lösung

$P(\bar{J}) = 0{,}3 \rightarrow P(J) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P(\bar{S}) = 0{,}45 \rightarrow P(S) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$

$P(J \cap S) = 0{,}4$

$P(J \cap S) = P(J) \cdot P(S)$

$0{,}4 \neq 0{,}7 \cdot 0{,}55$

$0{,}4 \neq 0{,}385$

-> Die Abwesenheiten der beiden Studierenden sind stochastisch abhängig. Die Abwesenheit des einen Studierenden hat eine Auswirkung auf die des anderen Studierenden.

Aufgabe 1.2 der AS

Für vier zufällige Ereignisse sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$P(A) = 0{,}25$ $\quad$ $P(A \cap B) = 0{,}04$

$P(B) = 0{,}16$ $\quad$ $P(A \cap D) = P(D)$

$P(D) = 0{,}01$ $\quad$ $P(A \cap E) = 0$

$P(E) = 0{,}04$

Ermitteln Sie $P(A|\bar{B})$, $P(A|E)$, $P(A \cup D)$ und $P(\overline{A \cup B})$.

Aufgabe 1.2 der AS - Lösung

- Da die Ereignisse A und B unabhängig sind, sind auch A und $\bar{B}$ unabhängig, so dass gilt: $P(A|\bar{B}), = P(A) = 0{,}25$
- Es gilt $P(A \cap E) = 0$. Die Ereignisse A und E sind somit unvereinbar. Damit ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|E)$ ebenfalls 0:
  $P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P€} = \frac{0}{P€} = 0$
- Da aufgrund der Info $P(A \cap D) = P(D)$ das Ereignis D Teilereignis von A sein muss ($D \subset A$), gilt: $P(A \cup D) = P(A) = 0{,}25$. Dieses Ergebnis erhält man auch als Spezialfall des allgemeinen Additionssatzes: $P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = P(A) + P(D) - P(D) = P(A)$
- $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - (0{,}25 + 0{,}16 - 0{,}04) = 0{,}63$

Aufgabe 1.3 der AS

Für die Ereignisse A und B sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$P(A) = 0{,}2$ $\quad P(B) = P(\overline{B})$ $\quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4$

a) Bestimmen Sie $P(B)$, $P(A \cap B)$ und $P(A|B)$.

b) Zusätzlich wird ein von B unabhängiges Ereignis C berücksichtigt mit $P(C|A) = 0{,}6$ und $P(C|\overline{A}) = 0{,}85$.
Bestimmen Sie $P(C)$, $P(A|C)$, $P(\overline{A}|C)$ und $P(C|\overline{B})$.

Aufgabe 1.3 der AS - Lösung

a)

- $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(B) <-> P(B) = 0{,}5$
- Einsetzen des umgeformten Additionssatzes: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}6 = 0{,}1$
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$

b)

Wenn B und C unabhängig, dann gilt $P(B|C) = P(B)$, $P(C|B) = P(C)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

- $P(C)$ unter Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit:
  $P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}12 + 0{,}68 = 0{,}8$
- $P(A|C) = \frac{P(A) \cdot P(C|A)}{P(C)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}8} = 0{,}15$
- $P(\overline{A}|C) = \frac{P(C|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})}{P(C)} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}8}{0{,}8} = 0{,}85$
- $P(C|\overline{B}) = \frac{P(C \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(C) \cdot P(\overline{B})}{P(\overline{B})} = P(C) = 0{,}8$

it's time for a quiz!