Aufgabe 1 Grundlagen Matrixrechnung – (7 Punkte)

(a) Gegeben ist die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie A^2 und A^3. (5 Punkte)

Lösung:

(b) Gegeben ist die folgende Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Inverse von B. (2 Punkte)

Lösung:

Aufgabe 2 Weiterführende Matrixrechnung – (11 Punkte)

(a) Gegeben ist das folgende Lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ & & 4x_2 & + & 2x_3 & = & a \end{array}$$

Untersuchen Sie die Lösbarkeit des LGS für $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie die exakte(n) Lösungsmenge(n) an. (5 Punkte)

Lösung:

(b) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $X = \frac{1}{3} \cdot B \cdot det(A) + 3 \cdot (B^{-1})^T \cdot det(2 \cdot A^{-1}) \cdot B^T$. (6 Punkte)

Hinweis: Vereinfachen Sie X zuerst so weit wie möglich.

Lösung:

Aufgabe 3 Lineare Optimierung – (22 Punkte)

Gegeben sei das folgende Lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcr} \min & x_1 & - & 2x_2 & & \\ s.t. & -x_1 & - & x_2 & \geq & -3 \\ & x_1 & - & x_2 & \geq & -1 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Überführen Sie das LP in die Standardform. (2 Punkte)

Lösung:

(b) Lösen Sie das Standardmaximierungsproblem aus Aufgabenteil (a) mit dem Simplex-Algorithmus. Geben Sie die optimale Lösung an (x^{opt}, z, s^*, y^*). (12 Punkte)

Lösung:

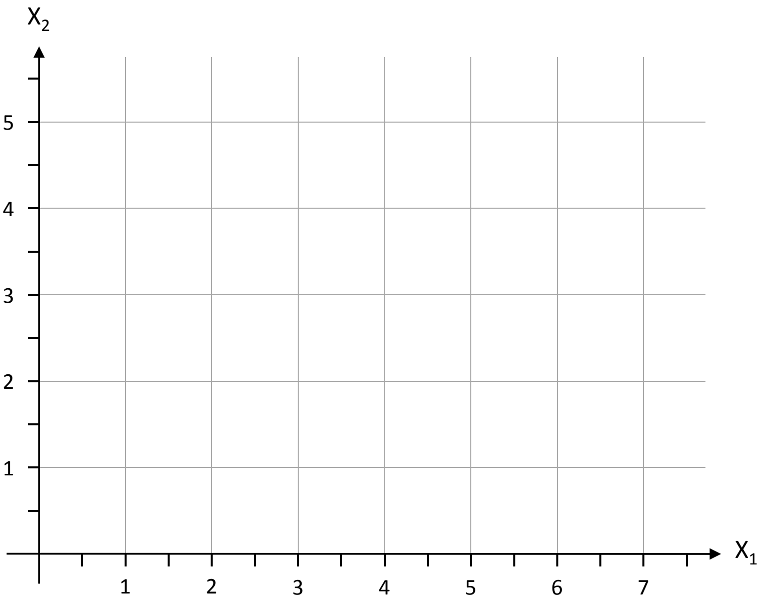
(c) Gehen Sie nun vom obigen Minimierungsproblem aus:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\min & x_1 & - & 2x_2 & & \\
s.t. & -x_1 & - & x_2 & \geq & -3 \\
 & x_1 & - & x_2 & \geq & -1 \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

(c.1) Lösen Sie das Problem graphisch und geben Sie die Lösung an. (6 Punkte)

(c.2) Kann das LP vereinfacht werden? Begründen Sie ihre Antwort **kurz**. (2 Punkte)

Lösung:



Aufgabe 4 Lineare Algebra – (5 Punkte)

(a) Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ. Nennen Sie die beiden Spezialfälle für die die Kommutativität jedoch gegeben ist. (2 Punkte)

Lösung:

(b) Gegeben sind die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$ und $C \in \mathbb{R}^{i \times j}$. Welche Bedingung muss für die Dimensionen der Matrizen gelten, damit der Term $C \cdot A + B^{-1}$ wohldefiniert ist? (3 Punkte)

Lösung:

Bonusfrage Excel-Solver – (2 Punkte)

Vergleichen Sie die Standard-Lösungsausgabe des Excel-Solver mit dem Endtableau des Simplex-Algorithmus. Welche Information(en) bezüglich der optimalen Lösung gibt der Excel-Solver aus und welche nicht?

Lösung: