Zusatzaufgaben II – Lösungen

Aufgabe 1)

Um die Vermutung zu überprüfen, dass Hintergrundmusik das Lesen beeinträchtigt, müssen 8 Studenten einen Lesetest (hoher Punktwert steht für gutes Leseergebnis) einmal ohne Musik (Messung A) und einmal mit Musik (Messung B) durchführen.
Kann die Vermutung mit Hilfe der Ergebnisse der Messungen bei einer Irrtums-wahrscheinlichkeit von 1% bestätigt werden, wenn davon ausgegangen werden kann, dass die Ergebnisse des Lesetests normalverteilt sind?

Messung A	Messung B
27	21
25	25
30	23
29	26
30	27
33	26
31	29
35	31

Lösung:

1. Hypothesen formulieren

$H_1: \mu_A > \mu_B \quad H_0: \mu_A \leq \mu_B$

2. Voraussetzungen prüfen

Mittelwertvergleich mit zwei abhängigen Stichproben; metrisches Skalenniveau; Normalverteilungsannahme gegeben → t-Test für abhängige Stichproben

3. Ablehnungsbereich bestimmen

Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}01$; df = 7; gerichtete Hypothese
$t_{7;0,99} = 2{,}998$

4. Prüfgröße berechnen

$$\bar{d} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} d_i = 4$$

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{8-1}\sum_{i=1}^{8}(d_i - 4)^2} = 2{,}507$$

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d} \cdot \sqrt{n} = \frac{4}{2{,}507} \cdot \sqrt{8} = 4{,}513$$

5. Testentscheidung fällen

Der Testwert ist größer als der kritische Wert, die Nullhypothese wird abgelehnt. Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% kann davon ausgegangen werden, dass Hintergrundmusik die Leseleistung beeinträchtigt.

Aufgabe 2)

In einem Restaurant gibt es 15 Tische, die alle einzeln nummeriert und noch frei sind. An einem Abend kommen zeitgleich 5 Paare, die jeweils an einem Tisch essen möchten. Wie viele mögliche Aufteilungen der einzelnen Paare auf die Tische gibt es?

Lösung:

$$NV_n = \frac{N!}{(N-n)!} = \frac{15!}{10!} = 360360$$

Aufgabe 3)

Im Rahmen einer kleinen Umfrage sollten die Teilnehmer unter anderem angeben, ob Sie schon einmal absichtlich „schwarz" gefahren sind. Im Folgenden sind die Ergebnisse aufgegliedert nach Geschlecht dargestellt:

	Freuen Sie sich auf die Fußball-EM 2016?		
	ja	nein	Gesamt
Geschlecht weiblich	8	25	33
männlich	17	12	29
Gesamt	25	37	62

Überprüfen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% ob die beiden Variablen unabhängig voneinander sind!

<u>Lösung:</u>

Hypothesen formulieren:
$H_0: p_{11} = p_{12} \quad H_1: p_{11} \neq p_{12}$

Voraussetzungen prüfen:
- alternative Daten (Nominalskalenniveau)
- kein Erwartungswert kleiner als 5; n > 60
- Vierfeldertafel; unabhängige Stichproben → Chiquadrattest

Kritischer Bereich:
$\chi^2_{1;0,99} = 6{,}636$

Prüfgröße berechnen:
$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)*(a+c)*(b+d)*(c+d)} = \frac{62*(8*12-17*25)^2}{33*25*37*29} = 7{,}581$$

Testentscheidung treffen:
Der Prüfwert von 7,581 ist größer als der kritische Wert von 6,636. Demnach muss die Nullhypothese abgelehnt werden. Das Geschlecht und das „Schwarzfahren" sind nicht unabhängig voneinander.

Aufgabe 4)

In einer Studie wird die Wahrscheinlichkeit dafür untersucht, dass weibliche Geschwisterpaare gerne mit Puppen spielen. Es zeigt sich, dass 60% der erstgeborenen Mädchen und 70% der zweitgeborenen Mädchen gerne mit Puppen spielen. Außerdem zeigt sich, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das zweitgeborene Mädchen gerne mit Puppen spielt, wenn auch das erstgeborene Mädchen dies tut, 80% beträgt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass (1) beide Mädchen gerne mit Puppen spielen, (2) das erstgeborene Mädchen gerne mit Puppen spielt, wenn das zweitgeborene Mädchen dies tut, (3) mindestens eines der Mädchen gerne mit Puppen spielt.
<u>Lösung:</u>

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}48}{0{,}7} = 0{,}69$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}48 = 0{,}82$$

Aufgabe 5)

Es soll überprüft werden, ob eine einfache Form der Meditation einen Effekt auf die Konzentrationsleistung hat. Hierfür werden zwei Gruppen von Versuchspersonen gebildet, von denen nur eine (Experimentalgruppe n = 53) die Meditation regelmäßig durchführt, die andere (Kontrollgruppe n = 51) nicht. Nach zwei Monaten wird mit Hilfe verschiedener Tests die Konzentrationsleistung der einzelnen Probanden überprüft und anschließend durch einen metrisch interpretierbaren Mittelwertindex wiedergegeben.

Die Resultate der Gruppen sehen folgendermaßen aus:
Experimentalgruppe - $\overline{x} = 7{,}22 \quad s^2 = 6{,}12$
Kontrollgruppe - $\overline{x} = 4{,}91 \quad s^2 = 6{,}54$
Unterscheiden sich die Ergebnisse systematisch bei einem Signifikanzniveau von 5%?
Es kann davon ausgegangen werden, dass die Konzentrationsleistung einer Normalverteilung folgt!

<u>Lösung:</u>

1. Hypothesen formulieren

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad H_0: \mu_1 = \mu_2$

2. Voraussetzungen prüfen

Skalenniveau metrisch, Normalverteilung liegt vor, Mittelwertvergleich zweier unabhängiger Gruppen. → t-Test für unabhängige Stichproben

3. Ablehnungsbereich festlegen

Irrtumswahrscheinlichkeit 5%; df = 102; ungerichtete Hypothese (obere kritische Grenze ausreichend, wenn mit dem Betrag der Prüfgröße verglichen wird)

$t_{0,975;102} \approx 1{,}98$

4. Prüfgröße berechnen

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) * s_1^2 + (n_2 - 1) * s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{52 * 6{,}12 + 50 * 6{,}54}{102}} = 2{,}52$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\hat{\sigma}} * \sqrt{\frac{n_1 * n_2}{n_1 + n_2}} = \frac{7{,}22 - 4{,}91}{2{,}52} * \sqrt{\frac{2703}{104}} = |4{,}67|$$

5. Testentscheidung fällen

Der empirische Wert ist größer als der kritische Wert. Die Nullhypothese muss demnach abgelehnt werden. Die beiden Gruppen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer durchschnittlichen Konzentrationsleistung auf einem Signifikanzniveau von 5%.

Aufgabe 6)

Ein Multiple-Choice Test besteht aus 8 Fragen. Jeder Frage folgen vier Antwortalternativen, von denen genau eine richtig ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei rein zufälligem Ankreuzen höchstens zwei Aufgaben richtig zu lösen?

Lösung:

$P(X \leq x) = \binom{N}{n} \cdot \text{p}^{n} \cdot (1 - \text{p})^{N-n}$

P(X≤2) = P(0) + P(1) + P(2)

P(X = 0) = $0{,}75^{8}$ = 0,10

P(X = 1) = 8 · $0{,}75^{7}$ · $0{,}25^{1}$ = 0,267

P(X = 2) = 28 · $0{,}75^{6}$ · $0{,}25^{2}$ = 0,311

P(X≤2) = 0,678

Die Wahrscheinlichkeit höchstens zwei Aufgaben richtig zu lösen beträgt 0,678 bzw. 67,8%.

Aufgabe 7)

Es soll untersucht werden wie viele Lose die Besucher eines Stadtfestes im Durchschnitt kaufen. Stichprobenartig werden hierfür einige Besucher, die an der Losbude hielten, befragt und es entstand folgende Urliste:
12 8 15 16 20 15 9 18 4
Es wird angenommen, dass die Zahl der gekauften Lose annähernd normalverteilt ist.
Ermitteln Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Zahl der gekauften Lose.

Lösung:

Ermittlung des Mittelwertes und der Standardabweichung

$\overline{x} = 13 \qquad s = 4{,}876$

Bestimmen des benötigten t-Wertes:

$t_{8;0,975} = 2{,}306$

Bestimmung des Standardfehlers:

$$\hat{\sigma}_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{4{,}876}{\sqrt{8}} = 1{,}724$$

Berechnung der Intervallgrenzen:

$$c.i(\mu_X) = \bar{x} \pm \hat{\sigma}(\bar{x}) * t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 13 \pm 1{,}724 * 2{,}306$$

Die wahre durchschnittliche Anzahl der gekauften Lose wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% vom Intervall [9,02; 16,98] überdeckt.

Aufgabe 8)

Eine Gruppe von 8 Wanderern macht Pause an einer Schänke. Um ein kühles Getränk zu sich zu nehmen, setzen sie sich alle auf eine lange Bierbank. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wanderer daraufhin zufällig der Größe nach geordnet (vom Kleinsten bis zum Größten) auf der Bank sitzen?

Lösung:

$P_N = N! = 8! = 40320.$

Um die Wahrscheinlichkeit zu errechnen muss der eine günstige Fall durch die 40320 möglichen Fälle dividiert werden.

$$P = \frac{1}{P_N} = \frac{1}{40320}$$

Aufgabe 9)

Im Anschluss einer Gesundheitsstudie mit 116 Teilnehmern wurde überprüft, ob zwischen dem durchschnittlichen Zigarettenkonsum am Tag und dem Gewicht der Befragten (in kg) ein Zusammenhang besteht und dabei ein Korrelationskoeffizient von r = 0,29 ermittelt.

Testen Sie unter der Berücksichtigung einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1%, ob der Koeffizient signifikant ist!

1.
$H_0\colon \rho \leq 0 \quad H_1\colon \rho > 0$

2.
Die Stichprobenverteilung des Korrelationskoeffizienten ist t-verteilt.

3.
$t_{df;1-\alpha} = t_{114;0,99} \approx 2{,}358$

4.

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} * \sqrt{n-2} = \frac{0{,}29}{\sqrt{1-0{,}29^2}} * \sqrt{116-2} = 3{,}24$$

5.

Der mittelstarke positive Zusammenhang zwischen den beiden Variablen kann auf die Grundgesamtheit übertragen werden. Da die Prüfgröße des Hypothesentests größer ist als der kritische Wert, wird die Nullhypothese abgelehnt. Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% ist der Zusammenhang zwischen dem Zigarettenkonsum und dem Gewicht signifikant.

Aufgabe 10)

Überprüft werden soll die Hypothese, dass Kinder im zweiten Schuljahr mehr der anderen Kinder als ihre Freunde bezeichnen als noch im ersten Schuljahr. Hierfür wurden 9 Kinder im ersten und im zweiten Schuljahr nach der Anzahl ihrer Freunde befragt. Mit folgenden Ergebnissen:

Teilnehmer	1. Schuljahr	2. Schuljahr
1	2	4
2	0	6
3	3	2
4	5	3
5	2	5
6	3	5
7	9	4
8	2	6
9	3	3

Testen Sie die Hypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%!
Auch wenn „Anzahl der Freunde" metrisch skaliert ist, kann hier nicht von einer Normalverteilung ausgegangen werden!

<u>Lösung:</u>

1. Hypothesen formulieren

H_1: $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$ H_0:$\tilde{x}_1 \geq \tilde{x}_2$

2. Voraussetzungen prüfen

metrisches Skalenniveau; keine Normalverteilungsannahme; abhängige Stichproben
→ Wilcoxon Test

3. Ablehnungsbereich festlegen

Irrtumswahrscheinlichkeit 5%; Stichprobengröße n = 8 (da Nulldifferenz!)
$T_{0,05;8} = 5$

4. Prüfgröße berechnen

Teilnehmer	1. Schuljahr	2. Schuljahr	Differenz	Rangplatz
1	2	4	-2	3
2	0	6	-6	8
3	3	2	1	1
4	5	3	2	3
5	2	5	-3	5
6	3	5	-2	3
7	9	4	5	7
8	2	6	-4	6
9	3	3	0	

$T = \min \{T_+; T_-\} = (11; 25) = 11$

5. Testentscheidung treffen

Da der empirische Wert größer ist als der kritische Wert, wird die Nullhypothese beibehalten. Auf einem Signifikanzniveau von 95% kann nicht davon ausgegangen werden, dass Kinder im zweiten Schuljahr mehr Freunde haben.

Aufgabe 11)

Eine Stichprobe von 123 Personen wurde vor der Einführung eines autofreien Sonntags in ihrem Wohnort gefragt, ob sie für oder gegen diese Maßnahme wären. Nach einem autofreien Sonntag wurden die Personen erneut dazu befragt. Überprüfen Sie auf einem Signifikanzniveau von 5%, ob das Erleben eines autofreien Sonntags eine Veränderung (mehr Befürwortung) zur Folge hat!

		Meinung nach autofreiem Sonntag		
		dafür	dagegen	Gesamt
Meinung vor autofreiem Sonntag	dafür	17	30	47
	dagegen	51	25	76
	Gesamt	68	55	123

<u>Lösung:</u>

1. Hypothesen formulieren
$H_0: p_{12} = p_{21} \quad H_1: p_{12} \neq p_{21}$

2. Voraussetzungen prüfen
dichotome Variablen; abhängige Stichproben; $n_{12} + n_{21} = 30 + 51 > 60$
→ Test von McNemar

3. Ablehnungsbereich bestimmen
$\chi^2_{1;0,95} = 3{,}84$

4. Prüfgröße berechnen

$$\chi^2 = \frac{(n_{12} - n_{21})^2}{n_{12} + n_{21}} = \frac{(30 - 51)^2}{30 + 51} = 5{,}44$$

5. Testentscheidung

Die Prüfgröße ist größer als der kritische Wert, die Nullhypothese wird abgelehnt. Es kann von einer signifikanten Veränderung hinsichtlich der Befürwortung des autofreien Sonntags ausgegangen werden.

Aufgabe 12)

Ein Medikament steht unter Verdacht als Nebenwirkung eine Verlangsamung der Reaktionszeit zur Folge zu haben. Um dies zu untersuchen, werden jeweils 10 Probanden in zwei Gruppen eingeteilt, von denen aber nur eine das Medikament erhält. Anschließend werden die Reaktionszeiten gemessen und in einem Stamm-Blatt-Diagramm dargestellt:

3	22	
	21	9
	20	
6, 4	19	2
6, 5, 4	18	3
9, 8, 2, 1	17	7
	16	1, 3
	15	4, 5, 8, 9
Medikament		Placebo

Bestätigt sich der Verdacht bei einem Signifikanzniveau von 5%?

Lösung:

1. Hypothesen formulieren

H_1: $p_D \neq 0{,}5$ H_0: $p_D = 0{,}5$ oder H_1: $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$ H_0: $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$

2. Voraussetzungen prüfen

Zwar metrisches Skalenniveau, aber keine Normalverteilung; unabhängige Stichproben; Test hinsichtlich der zentralen Tendenz → U-Test

3. Ablehnungsbereich bestimmen

Irrtumswahrscheinlichkeit 5%; Stichprobengröße jeweils 10
$U_{0{,}05;10;10} = 27$

4. Prüfgröße berechnen

Rangplatz Medikament	Rangplatz Placebo
7	1
8	2
10	3
11	4
13	5
14	6
15	9
17	12
18	16
20	19
Summe: $R_1 = 133$	Summe: $R_2 = 77$

$U = min\{U_1;\ U_2\}$

$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 133 - \frac{10*11}{2} = 78$
$U_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2} = 77 - \frac{10*11}{2} = 22$

5. Testentscheidung fällen

Der empirische U-Wert (22) ist kleiner als der kritische U-Wert (27), die Nullhypothese wird abgelehnt. Der Verdacht hat sich somit bestätigt. Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% geht eine Verschlechterung der Reaktionszeit von der Wirkung des Medikaments aus.

Aufgabe 13)

Gegeben sei eine Tüte mit 50 Gummibären (10 rote, 15 grüne, 12 gelbe, 5 weiße, 6 orangefarbene und 2 blaue).
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Herausgreifen von 3 Gummibären (mit Zurücklegen) der Reihenfolge nach einen roten, grünen und gelben zu erhalten?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Herausgreifen von 3 Gummibären (ohne Zurücklegen) einen weißen, orangefarbenen und blauen in der genannten Reihenfolge zu erhalten?

<u>Lösung:</u>

$$P(X) = \frac{1}{5} * \frac{3}{10} * \frac{6}{25} = 0{,}0144$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Gummibären in dieser Reihenfolge mit zurücklegen zu ziehen, beträgt 1,44%!

$$P(X) = \frac{1}{10} * \frac{6}{49} * \frac{1}{24} = 0{,}0005$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Gummibären in dieser Reihenfolge ohne zurücklegen zu ziehen, beträgt 0,05%!

Aufgabe 14)

Im Rahmen einer Regressionsanalyse bei der der Effekt der Schulweglänge auf die Durchschnittsnote der Schüler ermittelt werden soll, wurden für n = 10 folgende Kennwerte ermittelt:

$b = -0{,}242 \qquad \hat{\sigma}_b = 0{,}174$

Testen Sie auf einem Signifikanzniveau von 5%, ob der Regressionskoeffizient auf die Grundgesamtheit übertragbar ist!
<u>Lösung:</u>

Signifikanztest:

1.
H_0: $\beta \geq 0$ $\quad H_1$: $\beta < 0$

2.
Stichprobenverteilung des Regressionskoeffizienten ist t-verteilt

3.
$t_{df;\alpha} = t_{8;0,05} = -1{,}860$

4.

$$t = \frac{b}{\sigma_b} = \frac{-0{,}242}{0{,}174} = -1{,}39$$

5.
Der Prüfwert ist kleiner als der kritische Wert, die Nullhypothese wird demnach beibehalten. Es kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Schulweglänge über die Stichprobe hinaus einen signifikanten Effekt auf die Durchschnittsnote hat.

Aufgabe 15

Aufgrund der Normierung von IQ-Tests liegt der durchschnittliche Wert in der deutschen Bevölkerung bei 100 IQ-Punkte. Nach einer Erhebung in Sachsen hat man festgestellt, dass der durchschnittliche Wert der 250 Befragten bei 101,2 lag, bei einer Standardabweichung von 15,2. Überprüfen Sie die Vermutung, die Sachsen seien überdurchschnittlich intelligent mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%!

Lösung:

1. Hypothesen formulieren
H_1: $\mu_x > \mu_0$ $\quad H_0$: $\mu_x \leq \mu_0$

2. Voraussetzungen prüfen

Einstichprobentest; Bedingungen für Standardnormalverteilung erfüllt; Prüfgröße z (da n größer als 30)

3. Ablehnungsbereich festlegen

gerichtete Hypothese; $\alpha = 0{,}05$
$z_{krit} = 1{,}645$

4. Prüfgröße berechnen

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s_X}{\sqrt{n-1}}} = \frac{101{,}2 - 100}{\frac{15{,}2}{\sqrt{249}}} = 1{,}246$$

5. Testentscheidung fällen

Die Nullhypothese wird beibehalten, da der empirische z-Wert kleiner ist als der kritische z-Wert. Demnach sind die Sachsen nicht überdurchschnittlich intelligent.