1 Zufallsvariablen und deren Verteilung

Aufgabe 1.1

Ein Würfel wird zweimal geworfen. Der Wert der Zufallsvariablen X sei die kleinere der beiden geworfenen Augenzahlen bzw. die geworfene Augenzahl, wenn beide Würfel die gleiche Seite zeigen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion von X an.

Aufgabe 1.2

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $T_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,1 & \text{für } x = 1, 2, 3, 4, 5, \\ 0,5 & \text{für } x = 6. \end{cases}$$

a) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

b) Berechnen Sie $E[X]$ und $V[X]$.

c) Geben Sie die Quantilfunktion von X an.

Aufgabe 1.3

Gegeben sei die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Dichte von X und geben Sie den Träger von X an.

b) Geben Sie die zugehörige Quantilfunktion Q_X an.

c) Berechnen Sie den Median, den Erwartungswert und die Varianz von X.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{X < 0,5\}$.

Aufgabe 1.4

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x - c & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie c so, dass f eine Dichtefunktion ist.

b) Berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion und die Quantilfunktion.

c) Berechnen Sie das p-Quantil von X für die Werte $p = 0,2$ und $p = 0,9$.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X vom Erwartungswert um weniger als $\frac{1}{3}$ abweicht?

Aufgabe 1.5

Die Zufallsvariable X habe einen Erwartungswert von -3 und eine Varianz von 25.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen $Y = -4X + \frac{1}{2}$.

b) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der sich vom Erwartungswert um mindestens zehn unterscheidet.

Aufgabe 1.6

Ein fairer Würfel wird zweimal unabhängig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl beim zweiten Wurf größer ist als beim ersten Wurf?

Aufgabe 1.7

Eine (faire) Münze werde so lange geworfen bis entweder Zahl (Z) oder fünfmal hintereinander Wappen (W) erscheint. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der durchgeführten Würfe.

a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge an.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

c) Bestimmen Sie die Quantilfunktion. Welchen Wert haben die Quartile von X ?

d) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 1.8

Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 24x^{-4}, & \text{falls } x \geq c, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Wert des Parameters c.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und die Quantilfunktion der Zufallsvariablen X.

c) Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Median der Zufallsvariablen X.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X \leq 3), P(2,5 \leq X \leq 3,5), P(X = 3) \text{ und } P(X \geq 4).$$

Aufgabe 1.9

Ein Anleger geht davon aus, dass die Jahresrendite einer Aktie eine Zufallsvariable X mit $E[X] = 9\%$ und $\sqrt{V[X]} = 20\%$ ist.
Vorausgesetzt, die Annahmen des Anlegers sind korrekt, wie groß ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, dass die Jahresrendite höchstens -21% oder mindestens 39% beträgt?

Aufgabe 1.10

Bei einer Winkelmessung durch einen Geometer sei der Erwartungswert des Messfehlers gleich 0 Grad, seine Standardabweichung 1 Grad.

a) Wie groß ist höchstens die Wahrscheinlichkeit, dass der Messfehler mindestens zwei Standardabweichungen beträgt?

b) Wie groß ist mindestens die Wahrscheinlichkeit, dass der Messfehler geringer als 1,2 Grad ist?

2 Spezielle diskrete Verteilungen

Aufgabe 2.1

Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Sei X die Anzahl der ,,Sechsen“.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von X.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei ,,Sechsen“ geworfen werden?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine ,,Sechs“ geworfen wird?

Aufgabe 2.2

Bei einer Prüfung wird einem Kandidaten ein "Multiple-Choice"-Fragebogen vorgelegt. Dabei stehen unter jeder der neun Fragen in zufälliger Reihenfolge die richtige und zwei falsche Antworten. Zum Bestehen der Prüfung müssen mindestens 50% Antworten richtig angekreuzt werden. Ein Kandidat kreuzt bei jeder Frage eine der Antworten zufällig an.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er die Prüfung?

b) Man bestimme den Erwartungswert und die Streuung der Zufallsvariablen X, der Anzahl der richtigen Antworten, die man durch zufälliges Ankreuzen erreicht.

Aufgabe 2.3

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein deutscher Urlauber sich in einem bestimmten tropischen Land eine seltene Infektionskrankheit zuzieht, sei $p = 0,0001$. Nehmen Sie an, in einem Jahr verbringen 20 000 Deutsche ihren Urlaub in diesem Land.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens ein deutscher Urlauber die Infektionskrankheit zuzieht? Welche Annahmen treffen Sie zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit?

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Anzahl deutscher Urlauber, die sich mit der Krankheit infizieren.

Aufgabe 2.4

Eine Urne enthält 50 Kugeln, von denen fünf rot sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens zwei rote Kugeln ziehen, wenn Sie vier Kugeln ohne Zurücklegen aus der Urne ziehen? Wie groß wäre die entsprechende Wahrscheinlichkeit, wenn Sie mit Zurücklegen ziehen würden?

Aufgabe 2.5

Ein regionaler Verkehrsbetrieb untersucht die Verluste durch Schwarzfahrten im Kurzstreckenbereich. Es wird festgestellt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, kontrolliert zu werden, 5% beträgt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schwarzfahrer das erste Mal bei der 10. Fahrt kontrolliert wird?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schwarzfahrer frühestens bei der 10. Fahrt kontrolliert wird?

c) Wie hoch müsste das Bußgeld für Schwarzfahrer mindestens sein, damit sich Schwarzfahren nicht lohnt? (Gehen Sie von Fahrkartenpreisen von 3 Euro aus.)

Aufgabe 2.6

In dem Call-Center einer Direktbank treffen erfahrungsgemäß werktags in der Zeit von 17.00 Uhr bis 19.00 Uhr durchschnittlich 24 Anrufe ein. Die Anzahl Anrufe kann als Poisson-verteilt angesehen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Werktag

a) zwischen 17.00 Uhr und 17.20 Uhr keine Anrufe eintreffen?

b) in der Zeit zwischen 18.00 Uhr und 18.30 Uhr mehr als vier Anrufe eingehen?

c) zwischen 17.15 Uhr und 17.45 Uhr maximal fünf Anrufe eingehen, wenn bekannt ist, dass zwischen 17.15 Uhr und 18.15 Uhr genau zehn Anrufe eingegangen sind? (Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Anrufe zwischen 17.15 Uhr und 17.45 Uhr unabhängig von der Anzahl der Anrufe zwischen 17.45 Uhr und 18.15 Uhr ist.)

Aufgabe 2.7

Ein Billiganbieter stellt Mikrochips her. Ein von diesem Anbieter hergestellter Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Kauf von fünf dieser Chips

a) höchstens zwei Chips,

b) weniger als zwei Chips,

c) mindestens drei Chips,

d) mindestens einen Chip

mit einem Defekt zu erhalten?

Aufgabe 2.8

Die Firma Invinoveritas lagert in einem ihrer Weinkeller 80 Rotwein- und 40 Weißwein-Fässer. Dieser Weinkeller wurde beim letzten Hochwasser überflutet, so dass die Fässer nun völlig ungeordnet im Keller liegen. Der Inhaber lässt zunächst sechs Fässer aus dem Keller holen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter

a) genau drei Weißwein- und drei Rotwein-Fässer,

b) mindestens ein Rotwein-Fass,

c) höchstens vier Weißwein-Fässer

befinden?

Aufgabe 2.9

Die Versuche eines bestimmten Fahrschülers, die Führerscheinprüfung zu bestehen, können als unabhängige Versuche aufgefasst werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass er die Prüfung besteht, sei konstant $0,6$.

a) Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl Versuche (bzw. Prüfungen) bis zum Erhalt des Führerscheins.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fahrschüler mehr als vier weitere Versuche benötigt, wenn er bereits bei zwei Prüfungen durchgefallen ist.

Aufgabe 2.10

An einem bestimmten Drive-In-Restaurant halten im Schnitt neun Motorroller pro Stunde. Gehen Sie davon aus, dass die Anzahl der Motorroller pro Stunde Poisson-verteilt ist.

a) Wie viele Motorroller kommen durchschnittlich innerhalb einer halben Stunde?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 20 Minuten mehr als vier Motorroller kommen?

3 Spezielle stetige Verteilungen

Aufgabe 3.1

In einer Fabrik werden Konservendosen abgefüllt, deren Nettofüllgewicht als normalverteilt angesehen werden kann. Das zu erwartende Nettofüllgewicht einer Dose beträgt 249,2 Gramm, die Standardabweichung 11,37 Gramm. Das Label der Dosen gibt ein Nettofüllgewicht von 240 Gramm an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Dose untergewichtig ist.

Aufgabe 3.2

Die Zufallsvariable X sei standardnormalverteilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable $Y = 25 \cdot X - 6$

a) höchstens den Wert 30 annimmt.

b) mindestens den Wert 10 annimmt.

c) einen Wert von mindestens 20, aber kleiner als 24 annimmt.

d) den Wert 25 annimmt.

Aufgabe 3.3

Gegeben sei die normalverteilte Zufallsvariable X. Es ist bekannt, dass in 15,87% aller Fälle der Wert von X kleiner ist als 4 und in 2,5% aller Fälle größer als 21,76.
Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen.

Aufgabe 3.4

Die Zufallsvariable X beschreibe die Lebensdauer eines Fernsehgeräts (in h). X sei exponentialverteilt. Bestimmen Sie den Erwartungswert und den Median dieser Zufallsvariablen, wenn bekannt ist, dass $P(X \geq 10.000) = 0,7$ gilt.

Aufgabe 3.5

Eine Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0,01$.

a) Berechnen Sie $P(X > 100)$.

b) Berechnen Sie $P(X > 1.000 \mid X > 900)$.

c) Halten Sie es für angemessen, die Lebensdauer von technischen Geräten durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable zu beschreiben? Kurze Begründung. (Hinweis: Machen Sie sich die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen a) und b) zunutze.)

Aufgabe 3.6

In einer Fernseh-Spielshow wird von einem Mitspieler ein Glücksrad mit stetiger 360°-Einteilung in Bewegung gesetzt und der Stillstand abgewartet. Der angezeigte Winkel in Grad wird als Zufallsvariable X aufgefasst. Nehmen Sie an, dass $X \sim R(0; 360)$ gilt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad einen Winkel zwischen 100 und 200 Grad anzeigt?
Bestimmen Sie den Median von X.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad einen Winkel zwischen $10 \cdot n$ und $10 \cdot (n+1)$ Grad anzeigt ($n \in \{0, 1, ..., 35\}$)?

c) Der Spieler erhält einen Gewinn in Höhe von n Euro, wenn das Glücksrad einen Winkel zwischen $10 \cdot n$ und $10 \cdot (n+1)$ Grad anzeigt.
Fassen Sie den Gewinn als Zufallsvariable Y auf und geben Sie deren Verteilung sowie Erwartungswert und Standardabweichung an.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, weniger als 15 Euro als Gewinn zu erhalten?
Berechnen Sie den Median von Y.

Aufgabe 3.7

Die Lebensdauer X eines elektonischen Bauteils sei exponentialverteilt mit Parameter λ. Für die Aufgabenteile a) bis c) sei $\lambda = \frac{1}{500}$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil vor dem Zeitpunkt $t_0 = 200$ nicht ausfällt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 200$ und $t_2 = 300$ ausfällt?

c) Welche Zeitpunkte überlebt das Bauteil mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit?

d) Welchen Wert müsste der Parameter λ besitzen, damit mit Wahrscheinlichkeit 0,9 die Lebensdauer des Bauteils mindestens 50 Stunden beträgt?

Aufgabe 3.8

Untersuchen Sie die Genauigkeit, mit der man mittels der Tschebyscheff´schen Ungleichung eine Wahrscheinlichkeit vom Typ $P(|X - \mu_X| < 1)$ abschätzen kann, anhand der folgenden Beispiele:

a) $X \sim N(\mu; \sigma^2 = 0,25)$ für $\mu \in \mathbb{R}$

b) $X \sim Exp(\lambda)$ für $\lambda = 4$.

c) $X \sim R(-\alpha; \alpha)$ für $\alpha > 1$

Aufgabe 3.9

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable. Sie kennen zwei Quantile der Verteilung, nämlich $x_{0,33} = 0,56$ und $x_{0,8} = 1,8416$.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X negativ wird?

4 Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen

Aufgabe 4.1

X und Y seien zwei voneinander unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X] = 27$, $E[Y] = 13$, $V[X] = 10$ und $V[Y] = 12$. Berechnen Sie für die Zufallsvariablen

a) $Z_1 = 3X + 7Y$

b) $Z_2 = 3X - 7Y$

c) $Z = Z_1 + Z_2$

jeweils den Erwartungswert und die Varianz.

Aufgabe 4.2

Einem Verband gehören 5000 Selbständige an. Für einen zufällig ausgewählten Selbständigen sei
X = Einkommen aus selbständiger Arbeit,
Y = Einkommen aus Vermietung und Verpachtung,
Z = Einkommen aus Kapitalerträgen.
Gehen Sie davon aus, dass gilt:

$$\begin{array}{rrrr} E[X] = & 200.000 \text{ Euro} & \sqrt{V[X]} = & 100.000 \text{ Euro} \\ E[Y] = & 40.000 \text{ Euro} & \sqrt{V[Y]} = & 10.000 \text{ Euro} \\ E[Z] = & 60.000 \text{ Euro} & \sqrt{V[Z]} = & 15.000 \text{ Euro} \end{array}$$

Errechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung des Gesamteinkommens eines zufällig ausgewählten Selbständigen

a) unter der Annahme, dass X, Y und Z unabhängig sind.

b) unter der Annahme, dass $\rho_{XY} = \rho_{YZ} = \rho_{XZ} = 0,2$ ist.

Aufgabe 4.3

Gegeben seien zwei exponentialverteilte Zufallsvariablen $X \sim Exp(\lambda_X = 0,01)$ und $Y \sim Exp(\lambda_Y = 0,02)$. Die Zufallsvariablen seien voneinander unabhängig. Berechnen Sie $E[X + Y]$, $V[X + Y]$, $Cov(X, Y)$, $\rho(X, Y)$ sowie $E[X \cdot Y]$.

Aufgabe 4.4

Ein Taxiunternehmer hat fünf Taxen. Die Tages-Nettoeinnahmen (d.h. nach Entlohnung der Fahrer) pro Taxi seien Zufallsvariablen $X_1, ..., X_5$ mit folgender Spezifikation:

$$E[X_i] = 150 \text{ €} \qquad i = 1, ..., 5$$
$$\sqrt{V[X_i]} = 50 \text{ €} \qquad i = 1, ..., 5$$

Außerdem sei $\rho_{X_i X_j} = 0,4$ für $i \neq j$.

a) Errechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Tageseinnahme des Taxiunternehmers.

b) Errechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Jahreseinnahme des Taxiunternehmers, wenn Sie davon ausgehen können, dass die Tageseinnahmen (über die Tage hinweg) unabhängig sind und die Taxen an 360 Tagen unterwegs sind.

Aufgabe 4.5

Herr Reich besitzt ein Wertpapierdepot, welches Aktien von nur zwei Unternehmen enthält, nämlich Aktien der B-Bank und Aktien der G-Versicherung. Herr Reich möchte durch geschickte Gewichtung der Aktien die Standardabweichung der Gesamtrendite minimieren.
Seien R_B und R_G die jährlichen Renditen der oben genannten Aktien und sei R_{ges} die Jahresrendite des gesamten Portfolios. Aufgrund längerer Erfahrung ist bekannt, dass $E[R_B] = 0,1$, $E[R_G] = 0,08$, $V[R_B] = 0,042$, $V[R_G] = 0,024$ sowie $Cov[R_B, R_G] = 0,018$.

a) Berechnen Sie aus diesen Angaben den Korrelationskoeffizient von R_B und R_G und interpretieren Sie die Größe.

b) Ermitteln Sie, wie Herr Reich die Aktien in seinem Depot gewichten sollte, um sein obiges Ziel zu erreichen. Berechnen Sie für die erhaltene Konstellation von Gewichten die erwartete Gesamtrendite sowie die Varianz der Gesamtrendite.

Aufgabe 4.6

Eine Studentin legt 10.000 Euro für ein Jahr zu 6% an. Ihr Freund kauft für 10.000 Euro, Aktien eines jungen Technologieunternehmens und geht davon aus, dass die erwartete Jahresrendite 50% ist bei einer Standardabweichung von 100%. Außerdem geht er davon aus, dass die Jahresrendite normalverteilt ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student nach einem Jahr mehr verdient hat als seine (vorsichtigere) Freundin?

b) Nach einem Jahr schaut es für das Technologieunternehmen schlecht aus: Der Student muss seine Aktien für 3.000 Euro verkaufen, kann aber seine Freundin heiraten. Die 13.600 Euro, die dem Paar nun zur Verfügung stehen, sollen zu einem Teil a wieder zu 6% bei der Bank angelegt werden. Der Rest soll in Blue Chips angelegt werden, die eine erwartete Jahresrendite von 10% bei einer Standardabweichung von 20% bringen.

   (i) Sei $a = 0,5$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Wertes des Portefeuilles des Paares nach einem Jahr.

   (ii) Wie groß darf der Anteil a höchstens sein, wenn die erwartete Gesamtrendite mindestens 9% betragen soll?

   (iii) Wie groß muss a mindestens sein, falls die Standardabweichung der Gesamtrendite höchstens 10% betragen soll?

5 Grenzwertsätze und Approximationen

Aufgabe 5.1

Eine große Hausverwaltung, die einen Bestand von 10.000 Wohnungen betreut, möchte etwas über die Zufriedenheit der Mieter mit ihren Wohnungen wissen. Dazu werden aus dem Bestand 100 Wohnungen zufällig und ohne Zurücklegen ausgewählt und die Mieter befragt. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass in der Grundgesamtheit der 10.000 Wohnungen 70% der Mieter mit der Wohnung im Allgemeinen zufrieden sind. 5% der Mieter sind jedoch sehr unzufrieden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 ausgewählten Mietern weniger als 50 mit der Wohnung im Allgemeinen zufrieden sind? Geben Sie zunächst eine Formel für die gesuchte Wahrscheinlichkeit an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dann näherungsweise durch geeignete Approximationen.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 ausgewählten Mietern mindestens zwei mit der Wohnung sehr unzufrieden sind?

Aufgabe 5.2

Der Ausschuss-Prozentsatz in einer Produktionsserie von Lautsprecherboxen betrage 6%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Palette von 50 Stück aus dieser Produktion höchstens drei Ausschussstücke zu finden?

Aufgabe 5.3

In einer Lieferung von 400 Computernetzgeräten sind 40 defekte Geräte enthalten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei einer Überprüfung von 20 zufällig ausgewählten Geräten mehr als vier Geräte als defekt erweisen?

Aufgabe 5.4

In einer Urne befinden sich zehn Kugeln, welche mit den Ziffern $0, 1, 2, ..., 8, 9$ durchnummeriert sind.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der gezogenen Ziffer bei einmaligem zufälligen Ziehen aus der Urne.

b) Aus der Urne wird 50 Mal mit Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Summe der gezogenen Ziffern.

c) Wie ist die Summe der gezogenen Ziffern näherungsweise verteilt?

Aufgabe 5.5

Ein Taxiunternehmen beschäftigt 120 Fahrerinnen und Fahrer. Diese verdienen (Grundvergütung plus Zuschläge etc.) im Durchschnitt 1.800 Euro, netto im Monat bei einer Standardabweichung von 200 Euro.

a) Wie groß sind Erwartungswert und Varianz der monatlich ausgezahlten Netto-Gehaltssumme aller Fahrerinnen und Fahrer in diesem Unternehmen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Netto-Gehaltssumme aller Fahrerinnen und Fahrer in einem Monat größer ist als 219.000 Euro?

Aufgabe 5.6

Zwei Würfel werden 100mal gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal zwei Sechsen oben liegen?

Aufgabe 5.7

Die Anzahl X der Tippfehler pro Seite eines Manuskriptes sei $B(n;\pi)$ -verteilt mit $n = 400$ und $\pi = 0,005$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich auf einer Seite

  (i) mindestens ein Tippfehler

  (ii) mindestens zwei Tippfehler

  befinden?

b) Das Manuskript hat insgesamt 200 Seiten. Was können Sie über die Verteilung der Anzahl der Tippfehler im Manuskript aussagen? (Begründung der Vorgehensweise.)

  (i) Geben Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Anzahl der Tippfehler im Manuskript an.

  (ii) Was können Sie über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass das gesamte Manuskript zwischen 300 und 500 Fehler enthält?

6 Stichproben und Statistiken

Aufgabe 6.1

Aus der Grundgesamtheit der Wähler eines Bundeslandes werden $n = 1.100$ Personen zufällig und mit Zurücklegen ausgewählt. Sei

$$X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-te Person wählt die A-Partei,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Wie ist $\sum_{i=1}^{1.100} X_i$ zu interpretieren?

b) Wie ist $\sum_{i=1}^{1.100} X_i$ verteilt?

c) Nehmen Sie an, genau 40% der Wähler des Bundeslandes wählen die A-Partei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe mehr als 50% (also mehr als 550) A-Wähler befinden?

Aufgabe 6.2

Die Brenndauer von Glühlampen (in 1.000 Stunden) eines bestimmten Typs sei $Exp(\lambda)$-verteilt. $X_1, X_2, ..., X_{50}$ sei eine einfache Stichprobe aus $X \sim Exp(\lambda)$.

a) Wie sind $\sum_{i=1}^{50} X_i$ und $\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} X_i$ näherungsweise verteilt, wenn $\lambda = 0,2$ ist?

b) Betrachten Sie die von X_i abhängenden Zufallsvariablen

$$Y_i = \begin{cases} 1 & X_i \geq 3, \\ 0 & X_i < 3. \end{cases}$$

(i) Wie sind $\sum_{i=1}^{50} Y_i$ und $\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} Y_i$ zu interpretieren?

(ii) Wie ist $\sum_{i=1}^{50} Y_i$ verteilt, wenn $\lambda = 0,2$ ist?

Aufgabe 6.3

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 100 und Varianz 36. Es wird eine einfache Zufallsstichprobe $X_1, X_2, ..., X_{10}$ vom Umfang $n = 10$ gezogen und der Stichprobenmittelwert $\overline{X}$ berechnet.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Stichprobenmittelwerts.

b) Bestimmen Sie die Varianz des Stichprobenmittelwerts.

c) Standardisieren Sie den Stichprobenmittelwert und geben Sie die Verteilung der neuen Zufallsvariable an.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{X}$ größer als 102 ist?

e) Berechnen Sie das 0,1-Quantil und das 0,9-Quantil von $\overline{X}$. Was sagen sie aus?

7 Punkt- und Intervallschätzung

Aufgabe 7.1

Sei $X_1, X_2, ..., X_n$ eine einfache Stichprobe aus X mit $E[X] = \mu$ und $V[X] = \sigma^2$. Zur Schätzung von μ werden die folgenden Schätzer vorgeschlagen:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \overline{X} \\
T_2 &= \frac{1}{2}\,(X_2 + X_n) \\
T_3 &= \frac{4}{5}\overline{X}
\end{aligned}
$$

a) Prüfen Sie die Schätzer auf Erwartungstreue.

b) Bestimmen Sie die Varianzen der Schätzer.

c) Welchen der Schätzer würden Sie vorziehen?

Aufgabe 7.2

Auf einer Maschine werden Werkstücke hergestellt, deren Länge eine Varianz von $(2,8 \text{ mm})^2$ aufweist. Eine Zufallsstichprobe von zehn Stück ergab folgende Werte in mm:

41,6	37,1	42,4	39,3	40,2
36,1	37,6	43,5	36,7	37,2

Geben Sie ein Konfidenzintervall für den unbekannten Mittelwert der Werkstücklänge zu einem Niveau von mindestens $1 - \alpha = 0,95$ an.

Aufgabe 7.3

Das Einzelgewicht X von Bananen einer bestimmten Sorte sei als normalverteilte Zufallsvariable anzusehen. Eine einfache Stichprobe vom Umfang $n = 9$ erbrachte ein Gesamtgewicht von $1686,60$ (Gramm) und eine Stichprobenvarianz von $s^2 = 6,74^2$ (Gramm^2).

a) Geben Sie eine Punktschätzung für das durchschnittliche Gewicht einer einzelnen Banane dieser Sorte an.

b) Geben Sie ein 0,95-Konfidenzintervall für den unbekannten Mittelwert μ an.

Aufgabe 7.4

In der Mühle eines Freilichtmuseums wird nach alter Tradition Mehl gemahlen und in Säcke verpackt. Das Einzelgewicht X eines Mehlsacks kann als normalverteilte Größe angesehen werden. Die Varianz des Gewichts sei aus langjähriger Erfahrung bekannt und betrage (15 Gramm)^2. Eine einfache Stichprobe vom Umfang $n = 16$ erbrachte ein Gesamtgewicht von 7.936 Gramm.

a) Geben Sie eine Punktschätzung für das durchschnittliche Gewicht eines einzelnen Mehlsacks an.

b) Bestimmen Sie ein konkretes 0,90-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ an.

c) Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, wenn das 90%-Konfidenzintervall höchstens eine Breite von 6 Gramm haben soll?

Aufgabe 7.5

Bei einer Wahlumfrage wurden 200 zufällig ausgewählte Personen danach befragt, ob sie bei den nächsten Landtagswahlen für die SPD stimmen würden oder nicht. Von den befragten Personen gaben 75 Personen an, dass sie beabsichtigen, die SPD zu wählen.

a) Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,95$ ein Konfidenzintervall für den Stimmenanteil π der SPD.

b) Wie viele Personen hätten befragt werden müssen, um den Stimmenanteil der SPD bei einem Konfidenzniveau von 95% auf ∓ 3 Prozentpunkte genau zu prognostizieren?

Aufgabe 7.6

a) In einer Studie der Bundesregierung sollen die Chancen neu gegründeter Unternehmen untersucht werden. In einer einfachen Stichprobe von 200 neu gegründeten Unternehmen befinden sich 168 erfolgreiche Unternehmen (d.h. die innerhalb von drei Jahren einen Gewinn erwirtschaftet haben). Berechnen Sie zu einem Konfidenzniveau von 95% ein Konfidenzintervall für den Anteil der erfolgreichen Neugründungen.

b) Wie groß müsste der Stichprobenumfang sein, damit sich ein Konfidenzintervall für π mit einer Breite von höchstens 0,1 ergibt?

Aufgabe 7.7

Die Vorschriften für die Produktion einer bestimmten Aluminiumlegierung verlangen einen durchschnittlichen Natriumgehalt von mindestens $0,03\%$ und höchstens $0,1\%$. Aus Erfahrung weiß man, dass der Natriumgehalt einer Legierung normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung $\sigma = 0,015\%$ ist.

Eine Stichprobe der Länge 9 ergab die folgenden Werte für den Natriumgehalt (in %):

$$0,0701\ ;\ 0,0697\ ;\ 0,0693\ ;\ 0,0698\ ;\ 0,0703\ ;$$
$$0,0700\ ;\ 0,0702\ ;\ 0,0701\ ;\ 0,0705\ .$$

a) Geben Sie ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,99$ an.

b) Wie groß muss die Stichprobenlänge mindestens sein, damit ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0,99$ eine Breite von höchstens $0,01$ hat?

Aufgabe 7.8

In einem Land L gibt es drei Parteien A, B und C. Vor einer Wahl wurden von einem Meinungsforschungsinstitut $n = 1000$ Wahlberechtigte zufällig ausgewählt und nach der favorisierten Partei befragt. Es entschieden sich

410 für Partei A,

480 für Partei B,

110 für Partei C.

a) Geben Sie für den Anteil π_A der A-Wähler unter allen Wahlberechtigten ein 95%-Konfidenzintervall an.

b) Geben Sie für die Anzahl der Sitze der A-Partei im Parlament des Landes L ein 95%-Konfidenzintervall an, wenn es im Parlament insgesamt 120 Sitze gibt.
(Geben Sie an, wie Sie Stimmen in Sitze umrechnen.)

c) Ändern sich Ihre Ergebnisse, wenn Sie zusätzlich wissen, dass es im Land L zehn Millionen Wahlberechtigte gibt?

Aufgabe 7.9

In einer Umfrage zeigte sich, dass die Partei A bei der nächsten Wahl 45%, die Partei B bei der nächsten Wahl 7% der abgegebenen Stimmen erhalten würde. Wie groß muss in einer weiteren einfachen Stichprobe der Stichprobenumfang mindestens gewählt werden, damit sowohl für Partei A als auch für Partei B das jeweilige Konfidenzintervall für den Stichprobenanteil zum Niveau $1 - \alpha = 0,95$ höchstens eine Breite von vier Prozentpunkten hat?

8 Hypothesentests f¨ ur Erwartungswerte

Aufgabe 8.1

Eine Ladenkette fordert von den Erzeugern für Eisbergsalat ein mittleres Kopfgewicht von mindestens 1.000 Gramm. Das Gewicht kann als normalverteilte Größe angesehen werden. Aus einer Lieferung wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 7$ gezogen. Man erhält $\overline{x} = 960,7$ (Gramm) und $s = 46,5$ (Gramm).
Prüfen Sie auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$, ob das mittlere Kopfgewicht der Forderung entspricht.

Aufgabe 8.2

Ein Hersteller von Ventilatoren für PC's gibt für die Ventilatoren eine mittlere Lebensdauer von mindestens 3.000 Stunden an. Ein Verbraucherinstitut behauptet, die Lebensdauer sei geringer, und testet 50 Ventilatoren. Für diese ergibt sich eine mittlere Lebensdauer von 2.900 Stunden bei einer Stichprobenvarianz von (160 Stunden)^2.

Ist die Behauptung des Herstellers mit dem Stichprobenergebnis vereinbar ($\alpha = 0,05$)?

Aufgabe 8.3

Ein Zulieferer für Möbelstücke produziert Regalbretter mit einer Solllänge von 60 cm. Unterstellen Sie, dass die Länge der produzierten Regalbretter eine normalverteilte Größe mit einer Standardabweichung von 0,04 cm ist.

a) Wie hoch ist der Anteil produzierter Regalbretter mit einer Abweichung von mehr als 0,1% vom Sollwert ?

b) Ein großes Möbelhaus ordert 25 Regalbretter. Bei einer Überprüfung der Lieferung wird festgestellt, dass die mittlere Länge der Bretter in der Stichprobe (= Lieferung) 60,02 cm beträgt. Prüfen Sie mittels eines geeigneten Tests, ob das Möbelhaus die Lieferung zurückgeben sollen oder nicht ($\alpha = 5\%$).

Aufgabe 8.4

Ein Hersteller von Autoreifen besitzt zwei Produktionsstätten, Fabrik A und Fabrik B. Die Fabrik A stellt Reifen mit einer Laufleistung von 25.000 Kilometern her, die eine Standardabweichung von $\sigma_X = 400$ Kilometern aufweisen. In der Fabrik B werden die Autoreifen gleichen Typs hergestellt, die eine Standardabweichung von $\sigma_Y = 250$ Kilometern aufweisen. Im Rahmen einer internen Qualitätskontrolle werden 64 Reifen aus der Produktion von A und 50 Reifen aus

der Produktion von B überprüft. Dabei wird ermittelt, dass die Reifen von A im Durchschnitt 150 Kilometer länger halten als diejenigen von B. Kann der Produzent dieses Ergebnis noch berechtigtermaßen auf Zufallseinflüsse zurückführen ($\alpha = 0,01$)?
Ändert sich das Ergebnis, wenn die Laufleistung als normalverteilt angenommen wird?

Aufgabe 8.5

Es kommt zu einem Rechtsstreit zwischen einer sehr großen Firma und einer Angestellten, die behauptet, dass Frauen gegenüber den männlichen Angestellten zu wenig Gehalt bekommen. Sie sollen ein Gutachten erstellen, das die Behauptung der Frau belegt oder widerlegt. Folgende Daten stehen Ihnen zur Verfügung:

- Eine (einfache) Stichprobe vom Umfang 100 aus den männlichen Angestellten gleicher Qualifikation liefert folgende Gehaltsdaten: Das durchschnittliche Gehalt der Männer (in der Stichprobe) beträgt 4.976 Euro (pro Monat). Die korrigierte Stichprobenstandardabweichung der Männer beträgt 2.614 Euro.

- Eine (einfache) Stichprobe vom Umfang 100 aus den weiblichen Angestellten gleicher Qualifikation liefert folgende Gehaltsdaten: Das durchschnittliche Gehalt der Frauen (in der Stichprobe) beträgt 4.149 Euro (pro Monat). Die korrigierte Stichprobenstandardabweichung der Frauen beträgt 2.039 Euro.

Was sagt Ihr Gutachten (z.B. bei $\alpha = 5\%$)?

Aufgabe 8.6

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$ seien unabhängig und identisch normalverteilt mit Standardabweichung $\sigma = 5$ und unbekanntem Erwartungswert.
Eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 81$ ergibt einen Stichprobenmittelwert von $\overline{x} = 37$.

a) Überprüfen Sie mittels eines geeigneten Testverfahrens die Nullhypothese, dass der Erwartungswert μ größer oder gleich 38, gegen die Alternative, dass der Erwartungswert kleiner als 38 ist, bei einem α von 0,05.

b) Nehmen Sie an, dass der Erwartungswert tatsächlich 37 ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art?

Aufgabe 8.7

Von der Abfüllanlage einer Brauerei werden Flaschen gefüllt, wobei die Füllmenge X pro Flasche gewissen Schwankungen unterliegt und als normalverteilte Zufallsvariable mit bekannter Standardabweichung $\sigma = 1,5[cm^3]$ angesehen werden kann. Die Hypothese H_0, dass der Erwartungswert μ dieser Normalverteilung gleich dem Sollwert $\mu_0 = 330[cm^3]$ ist, soll anhand einer Stichprobe der Länge $n = 30$ überprüft werden.

Aufgrund der Interessenlage derjenigen Personen, die die Untersuchung vornehmen, unterscheiden wir drei Fälle, nämlich: Die Überprüfung geschieht durch:

a) (i) eine Eichkommission, die an einer Abweichung vom Sollwert $\mu_0 = 330$ sowohl nach unten als auch nach oben interessiert ist,
   (ii) eine Verbraucherorganisation, deren Interesse nur der Frage gilt, ob der wahre Erwartungswert μ kleiner als der Sollwert μ_0 ist,
   (iii) den Brauereibesitzer, von dem wir hier annehmen, dass er lediglich wissen will, ob im Mittel zu viel abgefüllt wird.

b) Formulieren Sie für jeden der drei Fälle das entsprechende Testproblem (d.h. H_0 und H_1) und bestimmen Sie dafür jeweils einen Test. Das Niveau der Tests sei jeweils $\alpha = 0,01$. Für welche Werte von $\overline{X}$ wird die Nullhypothese bei den drei Tests abgelehnt?

c) Als Stichprobenmittel für die Füllmenge ergab sich der Wert $\overline{X} = 329,33[cm^3]$. Wie entscheiden Sie sich in den drei Fällen?

Aufgabe 8.8

Die Redakteure einer Automobil-Zeitschrift stellen bei sieben zufällig ausgewählten deutschen Autohändlern den Preis für ein bestimmtes Fahrzeug fest. Aus den Preisen wurde ein Mittelwert von 31.500 Euro und eine korrigierte Standardabweichung von 4.500 Euro berechnet. Bei zehn zufällig ausgewählten Autohändlern im europäischen Ausland wurden ebenfalls die Preise erhoben; hierbei ergab sich 29.000 Euro im Mittel bei einer korrigierten Standardabweichung von 3.100 Euro.

a) Welche Annahmen müssen Sie treffen, wenn Sie mit dem Zweistichproben-t-Test auf signifikante Unterschiede testen wollen?
   Wie lautet genau die Nullhypothese?

b) Führen Sie den Test durch ($\alpha = 0,05$).

9 Lineare Regression

Aufgabe 9.1

Ein Unternehmen möchte untersuchen, ob ein erhöhter Werbeaufwand (X) in lokalen Tageszeitungen auch zu einem erhöhten Umsatz (Y) führt. Zur Durchführung der Untersuchung werden in zehn räumlich getrennten Regionen unterschiedlich starke Werbemaßnahmen durchgeführt. Hierzu werden für bestimmte (in den Regionen unterschiedliche) Beträge Anzeigen geschaltet:

Region i	Werbeaufwand x_i (in 100.000 Euro)	Umsatz Y_i (in Mio. Euro)
1	1	38
2	3	43
3	6	45
4	7	47
5	9	51
6	10	53
7	14	55
8	15	57
9	16	58
10	20	57

Daraus ergeben sich folgende Werte:

$$\overline{x} = 10,1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 1353 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{10} x_i Y_i = 5.448$$

$$\overline{Y} = 50,4 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{10} Y_i^2 = 25.824\ .$$

a) Berechnen Sie die Schätzwerte der Parameter einer einfachen linearen Regression ($Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + U_i$) des Umsatzes auf den Werbeaufwand. (Gehen Sie dabei von normalverteilten Störtermen aus: $U_i \sim N(0, \sigma^2)$.)

b) Berechnen Sie den Standardfehler des Parameterschätzers von β_1.

c) Hat der Werbeaufwand einen signifikanten Einfluss auf den Umsatz ($\alpha = 0,05$)?

d) Testen Sie die Hypothese, dass sich bei Erhöhung des Werbeaufwandes um eine Einheit der Umsatz um 1,1 Einheiten erhöht ($\alpha = 0,05$).

Aufgabe 9.2

Bei $n = 12$ Personen wurde die Körpergröße x_i [in cm] und das Gewicht y_i [in kg] ermittelt. Dabei ergaben sich die folgenden zusammengefassten Werte:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2.088, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = 888$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 364.464, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 67.330, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 155.784$$

Nehmen Sie an, dass die Werte $y_1, ..., y_{12}$ Realisierungen stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $Y_1, ..., Y_{12}$ sind und dass für $i = 1, ..., 12$ gilt:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + U_i \qquad \text{mit } U_i \sim N\left(0, \sigma^2\right).$$

Ferner seien $U_1, ..., U_{12}$ stochastisch unabhängig.

a) Berechnen Sie Schätzwerte für β_0, β_1 und σ^2.

b) Schätzen Sie die Standardabweichungen der Schätzer für β_0 und β_1.

c) Geben Sie ein Konfidenzintervall für β_0 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,95$ an.

d) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \beta_1 = 1$ gegen die Alternative $H_1 : \beta_1 \neq 1$ zu einem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$.

Aufgabe 9.3

Gegeben sind das private verfügbare Einkommen (X) und der private Verbrauch (Y) in der BRD (in Preisen von 1985).

Jahr	x in Mrd. DM	y in Mrd. DM
1985	1.119,93	1.036,53
1986	1.205,44	1.072,01
1987	1.239,32	1.106,88
1988	1.299,72	1.137,00
1989	1.323,60	1.167,37
1990	1.420,53	1.230,68
1991	1.417,17	1.274,63
1992	1.421,38	1.287,11

Es folgt

$$\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_8 &= 10.447,09 \\ y_1 + \ldots + y_8 &= 9.312,21 \\ x_1^2 + \ldots + x_8^2 &= 13.731.029,29 \\ y_1^2 + \ldots + y_8^2 &= 10.900.211,98 \\ x_1y_1 + \ldots + x_8y_8 &= 12.231.833,54 \end{aligned}$$

a) Führen Sie eine lineare Einfachregression vom Verbrauch auf das Einkommen durch.

b) Geben Sie für β_0 ein 90%-Konfidenzintervall an.

c) Testen Sie die Hypothese, dass β_0 mindestens den Wert 500 hat ($\alpha = 0,05$).

Aufgabe 9.4

Bei 50 Neugeborenen wurden jeweils die Größe (in cm) und das Gewicht (in kg) gemessen. Dabei ergab sich eine durchschnittliche Größe von 51,77 cm bei einer Standardabweichung von 3,04 cm. Das mittlere Gewicht der Kinder betrug 3,38 kg bei einer Standardabweichung von 0,63 kg. Die Kovarianz von Größe und Gewicht hatte den Wert 1,65.

Nehmen Sie an, dass die Annahmen des Modells der linearen Einfachregression mit normalverteilten Störgrößen erfüllt sind.

a) Schätzen Sie die Koeffizienten einer linearen Regression vom Gewicht auf die Größe.

b) Geben Sie ein Konfidenzintervall für den Koeffizienten β_1 zum Konfidenzniveau 0,95 an.

c) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0,05$ die Nullhypothese, dass der Koeffizient β_1 höchstens den Wert 0,15 hat.

Aufgabe 9.5

Mittels einer Statistiksoftware werde aus $n = 50$ Datensätzen eine multiple Regression

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + U_i; \quad U_i \sim N(0, \sigma^2)$$

geschätzt, wobei die Standardannahmen des linearen Regressionsmodells als gegeben angesehen werden. Das Programm liefert die folgende (unvollständige) Ausgabe:

Schätzer	Koeffizient	Standardfehler	t-Statistik*	p-Wert*
$\hat{\beta}_0$	22,9991	17,9012	1,2848	0,2053
$\hat{\beta}_1$	19,7465	4,2403	4,6569	$<$ 0,0001
$\hat{\beta}_2$	$-1{,}4497$	0,7238	?	?
$\hat{\beta}_3$	0,06158	?	?	0,1024

*für zweiseitigen Test auf $H_0 : \beta_j = 0$

Standardabweichung der abhängigen Variable (s_Y):	13,9763
Standardabweichung der empirischen Residuen ($s_{\hat{U}}; \hat{\sigma}$):	10,9740

a) Ein Ziel der zugrunde liegenden Studie ist es zu zeigen, dass die Variable X_2 einen negativen statistischen Zusammenhang mit der Zielvariable hat. Kann man diesen Zusammenhang mit einem Test zum Niveau $\alpha = 5\%$ sichern?

b) Ermitteln Sie die Entscheidung eines Tests ($\alpha = 5\%$) der Nullhypothese $\beta_1 = 0$ ohne weitere Rechnung aus den Daten der Tabelle.

c) Interpretieren Sie den p-Wert für den Schätzwert von β_3.

d) Berechnen Sie R^2 und interpretieren Sie es. (Hinweis: $s_Y^2 = s_{\hat{Y}}^2 + \hat{\sigma}^2 = s_{\hat{Y}}^2 + s_{\hat{U}}^2$)

e) Ein Kritiker behauptet, das vorliegende Ergebnis sei nur Zufall, die drei Regressoren x_1, x_2 und x_3 hätten tatsächlich keinen Zusammenhang mit Y. Lässt sich diese Behauptung mittels eines Tests ($\alpha = 5\%$) widerlegen?

Aufgabe 9.6

Ein Ökonometriker schätzt das folgende Regressionsmodell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + U_i$$

aus 20 Beobachtungen und erhält unter anderem folgendes Schätzergebnis (Schätzwerte der Standardfehler in Klammern):

$$\widehat{y}_i = \underset{(3{,}25)}{5,40} + \underset{(0{,}088)}{0,454\, x_{1i}} + \underset{(0{,}091)}{0,431\, x_{2i}}$$

mit

$$\begin{aligned} R^2 &= 0,86 \\ \hat{\sigma} &= 6,5. \end{aligned}$$

Die Schätzung der Kovarianzmatrix von $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_2$ ergab:

$$\begin{pmatrix} 0,007744 & -0,004000 \\ -0,004000 & 0,008281 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie an, dass die Standardannahmen des linearen Modells gelten und die Störterme normalverteilt sind.

a) Testen Sie

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_2 = 0 \\ H_1 &: \beta_2 \neq 0 \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art von 5%.

b) Testen Sie

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0 \\ H_1 &: \text{nicht } H_0 \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art von 5%.

c) Interpretieren Sie die Werte der Koeffizienten und den Wert für R^2.

d) Schätzen Sie den Korrelationskoeffizienten von $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_2$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 9.7

Der Output Y einer Volkswirtschaft werde in Abhängigkeit der eingesetzten Produktionsfaktoren Arbeit L und Kapital K betrachtet. Im Folgenden soll diese Abhängigkeit durch eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion der Form $Y = b_0 K^{\beta_1} L^{\beta_2}$ modelliert werden. Für die Jahre 2005 bis 2010 liegen folgende Beobachtungen des Outputs und der Produktionsfaktoren vor:

i	1	2	3	4	5	6
y_i (Mrd €)	2270	2300	2400	2470	2500	2570
k_i (Mrd €)	16000	17000	19000	22000	22000	24000
l_i (1000 Besch.)	22000	23000	24000	24000	23500	25000

a) Wie müssen Sie vorgehen, um mit Hilfe der linearen Regression die Koeffizienten b_0, β_1 und β_2 schätzen zu können?

b) Verwenden Sie R, um das Modell zu schätzen. Gehen Sie bei der Schätzung des Regressionsmodells von normalverteilten Störtermen ($U_1, \ldots, U_n \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$) aus.

c) Interpretieren Sie die Koeffizienten β_1 und β_2.

d) Leistet das Modell einen signifikanten Beitrag zur Erklärung des Outputs?

e) Haben die Merkmale „Arbeit“ sowie „Kapital“ jeweils einen signifikanten Einfluss auf den Output Y?

Aufgabe 9.8

In der folgenden Tabelle sind Typ, Alter und Anzahl der Störfälle je Jahr der im Frühjahr 2011 in Deutschland installierten Atomkraftwerke angegeben.

Name AKW	Typ	Alter	Störfälle je Jahr
Neckarwest 1	DWR	35	12.20
Neckarwest 2	DWR	23	3.48
Brokdorf	DWR	25	8.40
Brunsbüttel	SWR	35	13.20
Emsland	DWR	23	5.26
Grafenrheinf.	DWR	30	7.40
Isar 1	SWR	34	8.24
Isar 2	DWR	23	3.13
Krümmel	SWR	28	11.50
Philippsburg 1	SWR	32	10.53
Philippsburg 2	DWR	27	6.74
Unterweser	DWR	33	10.30
Grundremm. B	SWR	27	3.89
Grundremm. C	SWR	27	3.67
Biblis A	DWR	37	11.32
Biblis B	DWR	35	12.00
Grohnde	DWR	27	8.22

Mittels linearer Regression soll untersucht werden, ob das Alter und der Reaktortyp einen Einfluss auf die Häufigkeit der Störfälle haben.

a) Formulieren Sie ein geeignetes Regressionsmodell. Welche Modellannahmen müssen Sie (in Hinblick auf die weiteren Aufgabenteile) treffen?

b) Verwenden Sie R, um das Regressionsmodell aus Teil a) zu schätzen.

c) Leistet das verwendete Modell einen signifikanten Beitrag zur Erklärung der mittleren Störfallhäufigkeit?

d) Kann ein signifikanter Einfluss des Alters auf die mittlere Anzahl von Störfällen nachgewiesen werden?

e) Hat der Reaktortyp einen signifikanten Einfluss auf die mittlere Störfallhäufigkeit?

f) Geben Sie den Wert von R^2 an und interpretieren Sie ihn.

Aufgabe 9.9

Der KQ-Schätzer im linearen Regressionsmodell ist

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y}\,.$$

Zeigen Sie, dass man daraus im Fall einer linearen Einfachregression die KQ-Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{XY}}}{\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{X}}} \quad \text{und} \quad \hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{x}$$

erhält.

Aufgabe 9.10

Betrachten Sie das allgemeine univariate Regressionsmodell $Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + U_t$. für $t = 1, ..., n$.

a) $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$ sind nicht korreliert. Was können Sie über $\hat{\beta}_1$ sagen?

b) Betrachten Sie nun alternativ die Regression $Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t^2 + U_t$. Geben Sie Formeln für die OLS-Schätzer für β_0 und β_1 an.

Aufgabe 9.11

Betrachten Sie das lineare Modell

$$Y_t = \beta_0 + U_t, \quad t = 1, \ldots, n,$$

welches nur eine Konstante und keine weiteren Regressoren enthält. Wie sieht die Regressormatrix $\boldsymbol{X}$ aus? Bestimmen Sie den OLS-Schätzer für β_0.

Aufgabe 9.12

Wir betrachten nun die Prädiktormatrix $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ und die residuenerzeugende Matrix $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ im linearen Regressionsmodell $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{U}$. Zeigen Sie, dass

a) $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{PY} + \boldsymbol{MY}$,

b) $\hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{PY}$,

c) $\hat{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{MY}$.

Aufgabe 9.13

Gegeben sind die folgenden Modellgleichungen:

a) $y = x_1^{\beta_1 \sin^2(x_1)} \exp(\beta_1 \cos^2(x_1)\ln(x_1))\beta_2^{x_2}\exp(U)$ mit $x_1, \beta_2 > 0$ und $x_1, \beta_2 \neq 1$

b) $y = \beta_0 + \beta_1 \sin^2(x_2) + \beta_2 cos^2(x_3) + U$

c) $y = (\beta_0 + \beta_1 x_1 + U)^{-3}$

Formen Sie die Gleichungen, falls möglich so um, dass sie linear in den Parametern sind.

Aufgabe 9.14

Sei X das monatliche Nettoeinkommen und seien Y die monatlichen Wohnungsausgaben. Wir betrachten ein lineares, ein logarithmisches und zwei Semi-logarithmische Modelle:

$$
\begin{aligned}
Y &= \beta_0 + \beta_1 X + U && \text{(LIN)} \\
\ln(Y) &= \beta_0 + \beta_1 \ln(X) + U && \text{(LOG)} \\
\ln(Y) &= \beta_0 + \beta_1 X + U && \text{(SEMLOG1)} \\
Y &= \beta_0 + \beta_1 \ln(X) + U && \text{(SEMLOG2)}
\end{aligned}
$$

Wie ist der Koeffizient für das Nettoeinkommen in den vier Modellen jeweils zu interpretieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9.15

Im Ilias-Kurs finden Sie den Datensatz `Theil1971.txt`. Er enthält die folgenden Variablen:

consume = relativer Textilkonsum pro Kopf im Vergleich zum Basisjahr 1925;

income = relatives Realeinkommen pro Kopf im Vergleich zum Basisjahr 1925;

price = relativer Textilpreis im Vergleich zum Basisjahr 1925. Betrachten Sie das lineare Regressionsmodell:

$$\ln(\mathbf{consume}) = \beta_0 + \beta_1 \ln(\mathbf{income}) + \beta_2 \ln(\mathbf{price}) + U.$$

a) Schätzen Sie das Modell und interpretieren Sie es. Sind die Vorzeichen der Parameterschätzer plausibel? Prüfen Sie, ob die Linearitätsannahme gerechtfertigt ist, in dem Sie die angepassten Werte gegen die Residuen abtragen.

b) Sind die Parameter signifikant von 0 verschieden? Überprüfen Sie (5%-Niveau) auch die Hypothesenpaare

$$H_0^{(1)} : \beta_1 \leq 1 \quad \text{gegen} \quad H_1^{(1)} : \beta_1 > 1$$

und

$$H_0^{(2)} : \beta_2 \leq -1 \quad \text{gegen} \quad H_1^{(2)} : \beta_2 > -1.$$

Können Sie diese Hypothesen ökonomisch interpretieren (Hinweis: Elastizität)?

Aufgabe 9.16

Betrachten Sie folgendes Konfidenzintervall für einen Parameter β;

$$P(\hat{\theta}_u \leq \beta \leq \hat{\theta}_o) = 0{,}95\,, \tag{1}$$

wobei $\hat{\theta}_u = 0{,}5$ und $\hat{\theta}_o = 1{,}5$ geschätzt wurden. Testen Sie mit Hilfe von (1) folgende Nullhypothesen ohne Berechnung:

a) $H_0 : \beta = 1{,}6$ gegen: $H_1 : \beta \neq 1{,}6$ mit $\alpha = 5\%$

b) $H_0 : \beta = 0{,}6$ gegen: $H_1 : \beta \neq 0{,}6$ mit $\alpha = 5\%$

c) $H_0 : \beta = 0{,}5$ gegen: $H_1 : \beta \neq 0{,}5$ mit $\alpha = 10\%$

Aufgabe 9.17

Gegeben ist das Lineare Modell

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 z_t + U_t, \quad t = 1, \ldots, n\,,$$

wobei die Standardannahmen erfüllt seien. Beobachtet werden folgende Daten

t	1	2	3	4
x_t	-1	0	0	1
z_t	-2	-1	1	2
y_t	-8	-3	2	10

a) Berechnen Sie den OLS-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^T$. Nutzen Sie dafür folgendes Zwischenergebnis:

$$(\boldsymbol{X^T X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & & 0 \\ 0 & 2{,}5 & \\ & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie den Residuenvektor $\hat{\boldsymbol{U}}$, die Summe der Residuen und die Summe der quadrierten Residuen.

c) Berechnen Sie SST, SSE und SSR. Überprüfen Sie die Streuungszerlegung.

d) Berechnen und Interpretieren Sie das Bestimmtheitsmaß R^2.

Gewicht	113	54	137	24	58	36	44	9	19	11
Länge	25	25	20	15	12	12	8	6	5	5
Breite	10	5	15	4	10	8	7	4	3	2

Aufgabe 9.18

Sie haben 10 Metallbleche vom gleichen Material unterschiedlicher Länge x_1 und Breite x_2, aber gleicher Dicke vorliegen. Da Ihnen die Dichte des Metalls unbekannt ist, wiegen Sie alle 10 Metallbleche und schreiben das Gewicht in Gramm und die zugehörige Länge x_1 und Breite x_2 in cm auf. Die Ergebnisse befinden sich in der nachfolgenden Tabelle. Sie möchten das Gewicht eines neues Metallbleches beliebiger Länge und Breite vorhersagen. Stellen Sie die Daten durch ein geeignetes lineares Modell dar und bestimmen Sie den OLS-Schätzer. Wie groß würden Sie das Gewicht eines Metallbleches der Länge 10 cm und der Breite 4 cm schätzen?

Hinweis: Ist das gewöhnliche lineare Modell mit Achsenabschnitt und zwei Einflussgrößen hier angebracht?

Aufgabe 9.19

Betrachten Sie das Regressionsmodell

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t2} + \beta_2 x_{t3} + \beta_3 x_{t4} + U_t$$

und formulieren Sie die folgenden Restriktionen in der Form $\boldsymbol{H\beta} = \boldsymbol{h}$. Ist die Darstellung eindeutig?

a) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

b) $\beta_0 + \beta_1 = \beta_2$ und $\beta_3 = 1$

c) $\beta_0 + \beta_2 = 2\beta_3 - 1$

Aufgabe 9.20

Im Ilias-Kurs finden Sie den Datensatz `Konsum2.txt`. Er enthält Angaben zu den folgenden Variablen:

consume: jährlicher Pro-Kopf-Konsum von nichtlanglebigen Gütern und von Dienstleistungen in den USA (in Millionen US Dollar);

income: jährliches Pro-Kopf-Einkommen in den USA (in Millionen US Dollar);

real: Realzins (Zinsertrag einer Wertanlage bereinigt um die Inflationsrate).

Betrachten Sie das folgende Regressionsmodell

$$\textbf{dconsume} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \textbf{dincome} + \beta_2 \cdot \textbf{real} + u,$$

wobei folgende Variablen betrachtet werden:

dconsume: jährlicher Zuwachs des logarithmierten Pro-Kopf-Konsums (hier werden die Differenzen zweier aufeinanderfolgender logarithmierter Werte betrachtet);

dincome: jährlicher Zuwachs des logarithmierten Pro-Kopf-Einkommens (analog zu dconsume).

Schätzen Sie die Koeffizienten des angegebenen linearen Regressionsmodells und überprüfen Sie mit Hilfe des Chow-Tests (5%-Niveau), ob für $t^* = 16$ ein Strukturbruch in den Regressionskoeffizienten nachgewiesen werden kann.

Aufgabe 9.21

Zur Untersuchung der Arbeitsnachfrage wird das folgende Modell geschätzt:

$$\ln(n_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(p_t) + \beta_2 \ln(w_t) + U_t,$$

wobei n_t die Arbeitsnachfrage (Anzahl an Beschäftigten), p_t den Produktionsoutput (reale Bruttowertschöpfung) und w_t den Nominallohn darstellt. Dabei wurden jährliche Werte für den Zeitraum 1970-2006 verwendet.

a) Wie groß muss der Koeffizient β_2 sein, damit die Anzahl der Beschäftigten bei einer Senkung des Nominallohns um 5 Prozent von 25 Mio. auf 26 Mio. anwächst?

b) Vor der Währungsumstellung ergab eine Schätzung mit Nominallöhnen in DM $b_0 = 0{,}8$, $b_1 = 1{,}3$ und $b_2 = -1{,}5$. Zur Berücksichtigung der Umstellung auf den Euro wurde der Nominallohn mit dem Faktor $\frac{1}{1{,}95583} = 0{,}5113$ multipliziert. Welche Schätzwerte erhalten Sie für die drei Koeffizienten für die OLS-Schätzung des gleichen Zeitraumes, wenn anstelle der Nominallöhne in DM die Löhne in Euro verwendet werden?

Aufgabe 9.22

Zur Überprüfung der Kaufkraftparitäten-Theorie wird das folgende Regressionsmodell geschätzt:

$$\ln(WK_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_t) + \beta_2 \ln(P_t^*) + U_t \ ,$$

wobei WK_t der Wechselkurs Dollar/Euro, P_t das deutsche Preisniveau und P_t^* das amerikanische Preisniveau bezeichnet.

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1979:04–2003:12 ($T = 297$)
Abhängige Variable: LOG(WK)

	Koeffizient	Std. Fehler	t-Quotient	p-Wert
const	0,59	0,62	0,949	0,3432
LOG(P)	-1,42	0,43	-3,248	0,0013
LOG(P*)	1,28	0,30	4,233	0,0000

Mittel d. abh. Var.	0,02	Stdabw. d. abh. Var.	0,19
Summe d. quad. Res.	9,13	Stdfehler d. Regress.	0,17
R^2	0,18	Korrigiertes R^2	0,18
$F(2, 294)$	33,57	P-Wert(F)	0,00
Log-Likelihood	95,57	Akaike-Kriterium	−0,62
Schwarz-Kriterium	−0,58	Hannan–Quinn	
$\hat{\rho}$		Durbin–Watson	0,02

Abbildung 1: `R` Output

a) Interpretieren Sie den geschätzten Koeffizienten des deutschen logarithmierten Preisniveaus.

b) Der Wechselkurs des Euro beträgt derzeit $WK_t = 1{,}18$. Welcher Eurokurs wird erwartet, wenn sich das deutsche Preisniveau um 5 Prozent erhöht, während das amerikanische Preisniveau konstant bleibt?

c) Die absolute Version der Kaufkraftparitätentheorie besagt, dass

$$WK = \frac{P^*}{P}$$

gilt. Welche Restriktionen resultieren daraus für die Koeffizienten β_0, β_1 und β_2? Geben Sie diese Restriktionen in der Form $\boldsymbol{H\beta} = \boldsymbol{h}$ wieder.

d) Kann die Kaufkraftparitätentheorie durch die Daten bestätigt werden? Führen Sie dazu einen geeigneten Test durch ($\alpha = 0{,}05$), der die Nullhypothese $\boldsymbol{H\beta} = \boldsymbol{h}$ überprüft. Nutzen Sie zusätzlich folgende Angabe:

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0{,}08 & -0{,}02 & -0{,}03 \\ -0{,}02 & 0{,}37 & 0{,}40 \\ -0{,}03 & 0{,}40 & 0{,}77 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.23

Zur Untersuchung von Einkommensunterschieden zwischen Männern und Frauen steht ein Datensatz mit $n = 3079$ Personen zur Verfügung. Hierbei bezeichnet E das monatliche Nettoeinkommen in Euro, W die Wochenarbeitszeit in Stunden,

B die Bildungsjahre, A das Alter und F eine Dummyvariable für Frauen ($F_i = 1$ falls Person i eine Frau ist). Betrachten Sie die folgenden drei Modelle:

$$\ln(E_i) = \beta_0 + \beta_1 W_i + \beta_2 B_i + \beta_3 A_i + u_i \tag{M1}$$
$$\ln(E_i) = \beta_0 + \beta_1 W_i + \beta_2 B_i + \beta_3 A_i + \beta_4 F_i + u_i \tag{M2}$$
$$\ln(E_i) = \beta_0 + \beta_1 W_i + \beta_2 B_i + \beta_3 A_i + \beta_4 F_i + \beta_5 F_i A_i + u_i \tag{M3}$$

Wir erhalten folgende Schätzergebnisse:

$$\hat{\sigma}^2 = 0{,}289, \qquad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 4{,}857 & 0{,}021 & 0{,}077 & 0{,}015 \end{pmatrix}^T \tag{M1}$$
$$\hat{\sigma}^2 = 0{,}274, \qquad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 5{,}098 & 0{,}020 & 0{,}075 & 0{,}014 & -0{,}257 \end{pmatrix}^T \tag{M2}$$
$$\hat{\sigma}^2 = 0{,}273, \qquad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 5{,}028 & 0{,}020 & 0{,}073 & 0{,}016 & -0{,}087 & -0{,}003 \end{pmatrix}^T \tag{M3}$$

a) Eine getrennte Schätzung von (M1) für Frauen und Männer ergab jeweils eine Residuenquadratsumme von 461 und 377.

   Testen Sie ob in der Regressionsbeziehung für Männer und Frauen ein signifikanter Unterschied besteht ($\alpha = 5\%$).

b) Interpretieren Sie in Modell (M2) die Koeffizienten β_3 und β_4 und testen Sie ob in der Regressionsbeziehung für Männer und Frauen ein signifikanter Unterschied besteht ($\alpha = 5\%$). Die Hauptdiagonalelemente von $\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\boldsymbol{\beta}}]$ sind dabei

$$0{,}004, \quad 3 \cdot 10^{-7}, \quad 10^{-5}, \quad 4 \cdot 10^{-7}, \quad 4 \cdot 10^{-4}.$$

c) Interpretieren Sie in Modell (M3) die Koeffizienten β_3, β_4 und β_5 und testen Sie ob in der Regressionsbeziehung für 30-jährige Männer und 30-jährige Frauen ein signifikanter Unterschied besteht ($\alpha = 5\%$).
   Dabei ist $\widehat{\mathrm{Cov}}[\hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5] = -6 \cdot 10^{-5}$ und die Hauptdiagonalelemente von $\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\boldsymbol{\beta}}]$ sind

$$0{,}004, \quad 3 \cdot 10^{-7}, \quad 10^{-5}, \quad 7 \cdot 10^{-7}, \quad 0{,}0036, \quad 10^{-6}.$$

d) Sei M eine Dummyvariable für Männer ($M_i = 1$ falls Person i keine Frau ist). Können Sie den OLS-Schätzer für das folgende Modell bestimmen?

$$\ln(E_i) = \beta_0 + \beta_1 W_i + \beta_2 B_i + \beta_3 A_i + \beta_4 F_i + \beta_5 M_i + u_i$$

Aufgabe 9.24

Es wurde ein dynamisches Modell für den Zusammenhang zwischen der Wachstumsrate der Industrie-Produktion (WACHSTUM) und der ifo-Konjunkturerwartung

Abbildung 2: `R` Output

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1993:1–2008:9 ($T = 189$)
Abhängige Variable: WACHSTUM

	Koeffizient	Std. Fehler	t-Quotient	p-Wert
const	0,93		5,35	
WACHSTUM(-1)	0,70	0,043	16,09	0,000
IFO-ERW	0,11	0,018		0,000

Mittel d. abh. Var.	1,66	Stdabw. d. abh. Var.	
Summe d. quad. Res.	478,4	Stdfehler d. Regress.	1,60
R^2	0,807	Korrigiertes R^2	0,805
$F(2, 186)$	389,9	P-Wert(F)	0,0000
Log-Likelihood	−356	Akaike-Kriterium	
Schwarz-Kriterium		Hannan–Quinn	
$\hat{\rho}$		Durbin–Watson	2,56

(IFO-ERW) auf Basis von Monatsdaten geschätzt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 2 enthalten.

Eine Schätzung für den Zeitraum 1993(M01) - 1999(M12) liefert die Residuenquadratsumme $\text{RSS}_1 = 200$ und für den Zeitraum 2000(M01) - 2008(M09) ergibt die Residuenquadratsumme $\text{RSS}_2 = 201{,}4$. Haben sich die Regressionskoeffizienten zum Jahrtausendwechsel signifikant geändert?